FLORICA T. CÂMPAN



DUMNEZEU ȘI MATEMATICA

Editura TAIDA
– IAȘI –

FLORICA T. CÂMPAN

DUMNEZEU ŞI MATEMATICA

EDIŢIA A II-A

EDITURA TAIDA
IAŞI – 2005

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Dumnezeu şi matematica
Florica T. Câmpan / Iaşi: TAIDA, 2005
p. 64; cm. 14 x 20

ISBN 973-7980-43-3

I. Florica T. Câmpan

51(075.33)(079.1)

EDIŢIA I
ISBN 973-95346-6-X
EDITURA MINIED,
EDITOR VALENTIN PÂNZARIU
TEHNOREDACTOR DAN BRÂNZEI
TIPARUL GRAND PVD, 1994

EDITURA TAIDA Iaşi
Str. Vasile Lupu, nr. 70-74, bl. P3, sc. 3, et. 3, ap. 12, Iaşi - 700309
Tel/fax : ***0232.270250***
Gsm. ***0744.320323; 0741.232400***
www.editurataida.ro; alpharomania@pcnet.ro



PREFAȚĂ LA EDIȚIA II

Am avut privilegiul să o cunosc pe Florica T. Câmpan. Diferența de vârstă, vreo 36 de ani, nu a îngreunat câtuşi de puțin comunicarea şi simpatia reciprocă. Presimțind că vine vremea să închidă ochii mi-a înmânat cu mâini tremurânde manuscrisul acestei cărți, un caiet studențesc învelit cu grijă într-o hârtie ce era albă doar pe o față. Timpul nu era deloc prielnic unor asemenea scrieri. – *Ştiu că va veni o vreme când oamenii nu se vor înverşuna împotriva iubirii şi înțelegerii între ei şi univers. Poate vei găsi atunci vreme să socoteşti dacă este sau nu prielnic să o înfățişezi unor cititori.*

Vremea a venit, dar destul de şovăielnic. Manuscrisul, procesat şi listat, a adăstat mai bine de doi ani prin sertarele mai marilor Mitropoliei Iaşi. Într-un târziu, a fost returnat: – *Scrierea nu este de folos ortodoxiei; laudele de aici sunt pentru alte religii.*

Ştiam bine obârşia armenească a Floricăi. Ştiam că a ales ortodoxia găsind-o mai potrivită ca altele modului în care înțelegea ea credința, dragostea, toleranța, înțelegerea. Cu toate acestea, răspunsul primit m-a cam dezorientat. A mai trecut o vreme până m-am decis să înțeleg că esența bunei credințe nu impune algoritmi sau o cale unică de exprimare. Atunci am găsit modalitatea de a tipări 3000 exemplare care s-au împrăştiat atât de temeinic încât cu greu am mai găsit un exemplar prin care să reînnod editarea.

Februarie 2005 Dan Brânzei

PREFAȚĂ LA EDIȚIA I

Florica T. Câmpan (1906-1993) a văzut lumina zilei la 13(26) noiembrie 1906 în oraşul Iaşi, unde a rămas până în ultima clipă a existenței d-sale. Ca elevă a liceului „Oltea Doamna", pe care îl absolvă în 1924, a fost remarcată de profesoara Silvia Creangă pentru aptitudinile sale deosebite pentru matematică. Urmează Facultatea de Ştiințe din Iaşi, unde îşi trece licența în fizică (1928) şi apoi licența în matematică (1929). A funcționat întâi ca profesoară în învățământul liceal, iar în anul şcolar 1940-1941 ca asistentă la Seminarul Matematic. În 1942 îşi susține doctoratul în fața unei comisii prezidate de renumitul profesor Alexandru Myller, cu o teză de geometrie diferențială, intitulată „Surfaces paralléles et semblables".

În perioada 1945-1951 este conferențiar de matematici generale la Institutul de măsurători terestre din Iaşi, după care trece la facultatea de Matematică şi Fizică a Universității „Al. I. Cuza", unde rămâne până la pensionare. În ultimii ani ai vieții, doamna Prof. Dr. Doc. Florica T. Câmpan a funcționat ca profesor consultant la Catedra de Ecuații diferențiale, Cercetări operaționale şi Probabilități a Facultății de Matematică din Iaşi.

Numele distinsei profesoare Florica T. Câmpan este foarte cunoscut. Matematicienii cunosc realizările ştiințifice deosebite ale domniei sale, în special cele din domeniul geometriei diferențiale, cercetări inspirate de profesorul Alexandru Myller. Foarte apreciate sunt, de asemenea, studiile domniei sale de istoria matematicii.

Foştii studenți, astăzi răspândiți în toată țara, cărora domnia sa le-a împărtăşit din tainele matematicii, au cunoscut talentul didactic cu totul remarcabil şi generozitatea d-sale.

Marele public o cunoaşte, în primul rând, prin intermediul cărților de popularizare a matematicilor şi de istoria matematicii, în

care, aşa cum afirma academicianul Solomon Marcus, doamna „Prof. Dr. Doc. Florica T. Câmpan, om de ştiinţă de înaltă competenţă, talent şi cultură, face dovada măiestriei în prezentarea, nu numai accesibilă, dar şi agreabilă a obiectului. Iniţierea în fundamentele matematicii se împleteşte tot timpul cu grija pentru aspectul istoric şi uman al faptelor”. Aceste cărţi, în care se îmbină, în mod fericit, informaţia ştiinţifică cu talentul literar, au încântat mii de cititori de diferite vârste şi categorii sociale, atât din ţară cât şi din afară. În toate cărţile pe care le-a scris până acum („Istoria numărului π”, „Probleme celebre din istoria matematicii”, „Aventura geometriilor neeuclidiene”, „Licuricii din adâncuri” ş.a.), Florica T. Câmpan depăşeşte aspectul pur ştiinţific al investigaţiei, încercând să răspundă unor întrebări de natură filosofică sau mistică în legătură cu matematica.

Cartea de faţă poate fi socotită ca o încununare a eforturilor şi căutărilor de o viaţă ale autoarei, ca o sinteză a trăirii transcedentale în lumea matematicilor şi a marilor matematicieni. Florica T. Câmpan a pătruns cu discernământ în tainele evoluţiei matematicii, înţelegând că matematica nu este o simplă ştiinţă, ci ea reprezintă, ca şi credinţa, o cale pentru a te apropia de Dumnezeu. De altfel, ideea relaţiei dintre ştiinţă în general şi divinitate a preocupat de-a lungul istoriei pe majoritatea oamenilor de geniu. Omul însuşi a fost creat de Dumnezeu după chipul şi asemănarea sa, fiind înzestrat cu harul gândirii. Aleşii Domnului, oamenii de geniu, se bucură în plus de inspiraţie, care este de natură divină, şi îi conduce la revelaţia adevărurilor ştiinţifice. După cum spunea marele filosof şi gânditor creştin Petre Ţuţea (1901-1991) „revelaţia Realului este o favoare divină a alesului”.

În particular, tot Petre Ţuţea spunea că „matematica nu este o glorie a omului, cum a afirmat Kant, ci a Domnului, cum ne arată aleşii”. Desigur, în exprimarea filosofului român, matematica semnifica ştiinţa marilor descoperiri calitative ale minţii umane, ajutate de inspiraţia divină.

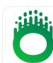
Cartea de faţă reprezintă, o pledoarie în sprijinul ideii că matematica este de natură divină. „Să ne apropiem de Dumnezeu, cum au făcut-o prin studiul matematicii mulţi dintre înaintaşii noştri. Oare matematica nu a lăsat gândirea să pătrundă într-o lume senină şi liniştită, paralelă cu aceea pe care au descoperit-o acei care au căutat adevărurile divine? Aş dori să ne cufundăm în matematica pură, în acele capitole care nu-şi propun nici un scop practic... să aruncăm o privire la matematica babiloniană, la cea egipteană şi, apoi, bineînţeles, să admirăm pe matematicienii greci. Apoi, din aproape în aproape, să ajungem la Georg Cantor care, introducând în matematică infinitul actual, ne-a apropiat chiar de Dumnezeu!", spune autoarea, stabilind astfel itinerarul excursiei în istoria matematicii la care sunt invitaţi cititorii.

Subiectele pe care le abordează sunt prezentate, ca şi în alte cărţi, sub forma unor dialoguri savuroase care dau investigaţiei abstracte culoare artistică şi căldură umană.

Cititorii de toate vârstele îşi vor îmbogăţi cugetul citind aceste ultime rânduri scrise de distinsa profesoară Florica T. Câmpan, care acum odihneşte în cimitirul Eternitatea, alături de alţi oameni celebri ai oraşului Iaşi.

10 aprilie 1994

GHEORGHE MOROŞANU
CATEDRA DE ECUAŢII DIFERENŢIALE



Dumnezeu și Matematica

„Matematica vine de la Dumnezeu și conduce la Dumnezeu”

Gerbert

- Dragă Bădie, am venit la mata, mânat de articolul acesta, publicat de Pierre Thuillier în ultimul număr din *„La Recherche*” (1) ca să-l forfecăm împreună. Dacă te uiți la dată și la titlu, poate că te vor surprinde...

- Data e clară, odată ce ai zis că-i ultimul număr din Recherche, înseamnă ianuarie 1987, rămâne să văd titlul.

- Titlul este pus sub forma unei întrebări: *„Matematica te conduce la Dumnezeu*?” și tot printr-o întrebare începe și articolul: *„Matematica este o flacără, interioară și naturală pe care Dumnezeu a aprins-o în noi, ca să pătrundem mai bine adevărurile vieții creștine*?”. Îți spun drept că venind încoace aveam impresia că nu aduc un articol publicat acum la Paris ci o lucrare scrisă prin veacul al X-lea, de către Gerbert!

- Gerbert? interesantă figură! Sub numele de Silvestru al II-lea, el a fost Papă în anul 1000. A studiat și chiar a predat matematica și a scris o aritmetică și o geometrie.

- Exact. S-a născut în Franța cam prin anul 940 și a intrat de mic copil în mănăstire. Arătând o deosebită înclinare către studiu, alături de Biblie a mai învățat și gramatica, limba latină, retorica, logica și, la urmă, aritmetica și geometria, care i s-au lipit de suflet.

- Dar Gerbert nu a fost singurul călugăr care pe lângă Biblie să fi studiat și matematica! Înaintea lui au făcut-o mulți alții și numai datorită lor s-au păstrat, în Bibliotecile mănăstirești, mai multe manuscrise matematice.

- Da, în epoca plină de frământări sociale, care a început în secolul al IV-lea, și a durat până în secolul al IX-lea, acolo era singurul loc sigur, unde asemenea manuscrise și-au găsit adăpost. Foarte probabil că acolo a cunoscut Gerbert și cele două cărți ale

lui Boetius: „*De institutione arithmetica*", în care se afirmă că ştiinţa teologică rămâne inaccesibilă acelora care nu au formaţie matematică. Şi poate şi Aritmetica lui Cassiodor, elev al lui Boetius, în care se arată că „un motiv suficient ca să fii îndemnat să studiezi matematica este faptul că Dumnezeu a creat Universul introducând la baza lui noţiunile de număr, de măsură şi de greutate".

Prin anul 967, Gerbert se afla în Spania, dar nu se ştie dacă a putut studia matematica în şcolile din acea regiune. În 972 era din nou în Franţa ca director al şcolilor din Reims, acolo a predat matematica şi a scris Aritmetica în care găsim afirmaţia: „*Aritmetica nu a fost făcută de oameni căci în ea se află statornicia şi înţelepciunea puterii inexprimabile şi divine, despre care se spune că a făcut toate lucrurile cu măsură, greutate şi număr*" (2). După anul 999, când Gerbert a devenit Papă, el a compus şi Geometria în care afirmă: „*Geometria exercită forţele spirituale, ea activează pătrunderea lor, ea este plină de speculaţii sublime, ea ne conduce la contemplare, ne face să lăudăm admirabila putere a naturii şi a Creatorului ei, care a dispus toate lucrurile cu număr, măsură şi greutate*" (3).

- Ştiai că această ultimă propoziţie se află în Biblie şi că a fost rostită de Solomon? (4).

- Nu. Acum îmi explic eu, de ce repetă savantul medieval această afirmaţie, pe care o pusese şi în Aritmetică. Gerbert a murit în 1003 dar de-a lungul Evului Mediu, ba chiar şi până în secolul al XIX-lea viaţa şi opera lui au fost cercetate cu pasiune. Bineînţeles că în biografia acestui Papă filosof a fost loc să se intercaleze destule legende, în care nu putea să nu apară şi diavolul. În studiul lui Picavet, găsim observaţia: „*Gerbert i-a întrecut pe toţi contemporanii săi... şi a uimit prin mulţimea cunoştinţelor sale. Succesele lui ca profesor i-au atras prietenia celor mari, a regilor şi a împăraţilor... Alături de ignoranţa mereu crescândă a celor din jurul său, se opunea sinteza făcută de Gerbert din toate cunoştinţele umane şi divine. Rivalii lui la papalitate, precum şi mulţimea igno-*

rantă, au ţesut în jurul succeselor lui, precum şi a morţii lui neaşteptate, poveşti în care au amestecat puterile magiei" (5).

- Dar, după câte văd eu, dragă Nucule, ne-am cam luat cu vorba şi am lăsat la o parte articolul tău. Hai să vedem cum a răspuns autorul la întrebările pe care le-a pus.

- Poftim, întâi afirmă că mulţi au fost de această părere. Apoi arată că în secolele XVII şi XVIII mulţi apărători ai creştinismului au subliniat că matematica apare ca o ocazie favorabilă de a te apropia de Dumnezeu. Ca exemplu, citează mai întâi „*Elementele de Geometrie*" ale lui R. P. Bernard Lamy, apărute în 1685, care încep cu cuvintele: „*Am refăcut această lucrare, fiindcă am recunoscut că ea poate servi la formarea spiritului şi a inimii.*

Pe Dumnezeu trebuie să-l privim în toate lucrurile şi studiul geometriei trebuie să ne ducă într-acolo.... Tot ce apare frumos în această ştiinţă relativ la figuri, la rapoartele şi propoziţiile lor, se observă şi în operele naturii, ceea ce ne dă prilejul să admirăm pe Acela care a fost Făcătorul. Pe lângă plăcerea spirituală pe care ne-o dă geometria, ca să ne pătrundă de dispreţ pentru voluptate, şi prin aceasta de a ne face mai apţi pentru morala Evangheliei... ea ne face să cunoaştem cât de vastă este ştiinţa pe care o posedă acei care îl văd pe Dumnezeu şi de câtă plăcere se bucură descoperind atâtea adevăruri de esenţă divină".

-Aşa dar, iată că influenţa lui Gerbert se vădeşte şi după aproape şapte veacuri!

-Bine, dar şi înainte de Lamy, cardinalul Nicolas de Cues (1401-1464) se referă nu numai la acest text, ci şi la acela al lui Boetius: „*Ştiinţa veritabilă este aceea a numărului şi a mărimii*", spune el, continuând: „*mai mult, ştiinţa teologică ar rămâne inaccesibilă aceluia care i-ar lipsi formaţia matematică. Căci principalul model divin a fost, în însăşi gândirea Creatorului, Numărul*".

Contemporan cu Lamy era şi iezuitul Ignace de Pardies care a publicat în 1673 o altă geometrie în care este vorba de o demonstraţie şi mai rafinată a existenţei lui Dumnezeu, prin considerarea

spațiilor asimptotice: *„Cunoașterea spațiilor asimptotice este lucrul cel mai admirabil din lume și care ne face să vedem cel mai limpede mărimea și spiritualitatea sufletului nostru, căci prin lumina spiritului său, pătrunzând dincolo de infinit, el descoperă așa de clar lucrurile, pe care nici o experiență sensibilă nu ne poate învăța și pe care nici o putere corporală nu ar putea-o observa... Aceste spații infinite în lungime, sunt totuși egale cu un cerc sau cu o figură limitată, astfel că infinitul însuși, așa de imens și de nenumărat cum este, se reduce la calcul și la măsura Geometriei și Spiritul nostru, încă mai mare decât calculul, este capabil să-l înțeleagă.*

Din toate cunoștințele naturale pe care omul și le poate însuși prin propriul raționament, cea mai admirabilă este, desigur, înțelegerea infinitului. Trebuie să recunoaștem că noi avem, separată de materie și venind din alt loc decât din corp, o facultate spirituală, independentă de organele noastre, avem idei și reprezentări clare și distincte despre o întindere infinită și, prin urmare, această facultate care ne reprezintă astfel, ceea ce nici un corp nu poate reprezenta, este o putere pur spirituală și deosebită de materie. Printr-o simplă demonstrație, Geometria probează, pe de o parte, una dintre cele mai admirabile proprietăți ale naturii și, pe de altă parte, unul dintre cele mai mari adevăruri morale... natura divină este un abis de lumină ce se răspândește peste tot... Prin exemplul asimptotelor, Geometria demonstrează că trebuie să revenim la prima natură... Rezultă, de aici, că noi posedăm o dovadă de netăgăduit despre experiența lui Dumnezeu, pentru că numai El a putut zămisli o realitate în care se leagă împreună așa de remarcabil, infinitul cu finitul".

Văd că odată cu noțiunea de infinit, în articolul tău apare și celebra cugetare a lui Pascal: *„Dumnezeu este un cerc al cărui centru este pretutindeni iar circumferința nicăieri"*, remarcându-se totodată că această imagine a fost luată din tradiția hermetică!

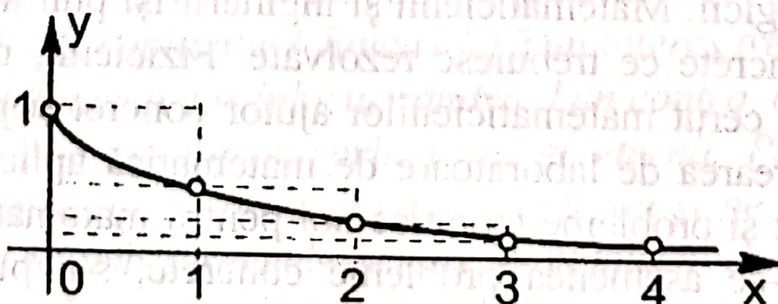
- În articol este menţionată şi cartea abatelui de Moigno, „*Splendorile credinţei*", publicată în 1879, în care se afirmă cu vigoare valoarea religioasă a matematicii: „*dogma capitală a creaţiei este un simplu corolar al ştiinţei numerelor*", sau că: „*ateismul este negaţia evidenţei matematice*".

- Stai, că ai trecut prea repede la Moigno! În legătură cu spaţiile asimptotice, Pardies vorbeşte despre „*o simplă demonstraţie geometrică*", o face? Aş vrea să ne oprim asupra ei.

- Se poate. În articolul care este în faţa noastră nu o vei găsi, dar ai noroc că am adus cu mine cartea lui Maupin, pe care P. Thuillier o citează şi din care am să-ţi citesc ce spune: „*Pardies afirmă că spaţiile infinite în lungime sunt egale cu o mărime determinată*".

-Opreşte-te din nou. Mai întâi să definim ce se înţelege prin asimptota unei curbe.

-Dacă vrei, bine. Asimptota unei curbe, care are o ramură infinită, (bineînţeles că o curbă poate avea şi mai multe ramuri infinite, unele având asimptote, altele nu) este dreapta care rămâne paralelă cu acea ramură a curbei, adică o întâlneşte la infinit. Acum citesc mai departe din Maupin: „*Asta înseamnă că dacă consideri o curbă, ca de exemplu* $y = 2^{-x}$, *spaţiul cuprins între Oy, această curbă şi simptota ei Ox, deşi are o lungime infinită, rămâne totuşi finit. Aici, de exemplu, se vede că spaţiul considerat este mai mic decât suma arcelor dreptunghiurilor având aceeaşi baza egală cu 1 şi înălţimile respectiv egale cu 1, 1/2, 1/4, 1/8,... ori această sumă de arii ale dreptunghiurilor are ca limită* 2 (6).



- Îmi place, acum poţi vorbi şi de Moigno.

- Abatele Moigno este citat în Marele dicţionar universal al lui Larousse unde se arată că el a urmat cursurile de matematică ale lui A. Cauchy şi, inspirat de aceasta, a compus la rândul lui un curs de Calcul diferenţial şi integral. Despre Cauchy se spune că, în cursul său, a contrazis teza materialistă, spunând că: *„lumea a avut un început şi va avea un sfârşit"* ajungând la concluzia că *„ştiinţa ne conduce în mod obligatoriu la ceea ce ne învaţă credinţa: materia nu-i eternă şi dacă cea mai veche dintre cărţi nu ne-a revelat destul de clar acest adevăr, dacă nu-l admitem fiind creştini, suntem obligaţi să-l admitem ca aritmeticieni, ca matematicieni"*.

- Curioasă gadină mai eşti şi tu, dragă Nucule! Tocmai acum, când în domeniul aplicaţiilor matematica a luat o dezvoltare aşa de mare, când se stabilesc algoritmii prin care să se poată trece pe calculatoare problemele ce se cer rezolvate, când problemele ce se pun matematicii sunt, în cea mai mare parte, de natură tehnologică, când e la modă analiza numerică cu toate aplicaţiile ei practice, tu vii la mine şi-mi propui să discutăm despre părerile lui Gerbert, Lamy, Pardies?

- Deloc! Gerbert, Lamy, Pardies au fost doar nişte exemple întâmplătoare. Ştiu, tot aşa de bine ca şi mata, cât de mult s-a schimbat matematica în ultimii 60 de ani. Acum, multe probleme care se considerau odinioară că fac parte din matematica pură, ca de pildă geometria cu patru dimensiuni, aparţin fizicii şi matematicilor aplicate. Tot aşa teoria grupurilor are largi aplicaţii în teoria informaticii. În acelaşi timp, informatica a pus probleme noi algebrei şi logicii. Matematicienii şi inginerii îşi pun împreună problemele concrete ce trebuiesc rezolvate. Fizicienii, inginerii, economiştii au cerut matematicienilor ajutor concret şi precis; aceasta a dus la crearea de laboratoare de matematică aplicată în care s-au dezvoltat şi probleme teoretice noi pentru matematicieni, şi numai punându-se asemenea probleme concrete, s-a putut observa că

anumite capitole ale matematicii nu erau în stare să dea soluţiile potrivite care se cereau şi de aceea acele capitole au trebuit dezvoltate.

În felul acesta asistăm acum la o reînnoire a matematicii. Dar cu toate că eu nu contest meritul matematicii actuale şi importanţa soluţiilor pe care le aduce ea, la dezvoltarea problemelor concrete şi prezente, eu îţi cer altceva. Am venit azi la mata să te rog să uităm prezentul şi să privim matematica din interior, ca pe o poezie, căci poezia este trăire interioară, reflectarea unei splendori spirituale. Să ne cufundăm în ea, „*ca într-o mare de visări dulci şi senine*", cum spune Eminescu. Să ne apropiem astfel de Dumnezeu, cum au făcut-o prin studiul matematicii mulţi dintre înaintaşii noştri. Oare matematica nu a lăsat gândirea să pătrundă într-o lume senină şi liniştită, paralelă cu aceea pe care au descoperit-o acei care au căutat adevărurile divine? Aş dori să ne cufundăm în matematica pură, în acele capitole care nu-şi propun nici un scop practic, nici nu s-au dezvoltat dintr-o nevoie practică şi nici nu-şi propun să rezolve o chestiune practică. Să ne îndreptăm spre acele înălţimi neclintite:

"*Unde nicicând nu se strecoară un nor,*
Unde vântul nestăvilit, să adie nu se-ncumetă,
Şi nici un fulg de nea nu cade pe pământ,
Unde nu pot ajunge tunetele furtunii,
Unde n-auzi suspinile amare ale omului
Şi nimic nu izbuteşte
Liniştea veşnică şi sfântă să tulbure"(7)

La aceste versuri, inspirate de un Referat din 1870 asupra naturii matematicii, aş vrea să mai adaug şi această observaţie a lui P. Boutroux (8): „*O aplicaţie tehnică oferă un interes trecător, căci alte progrese tehnice o vor înlocui cândva. Din contra, o frumoasă teorie matematică se impune prin forţa ei eternă. Proprietăţile secţiunilor conice nu au aceeaşi valoare azi, ca şi pe vremea lui Apollonius? În schimb, formulele pe care le-au folosit Alexandrinii ca să-şi construiască podurile ori corăbiile, sau ca să-şi construiască*

tabelele astronomice, au pierdut orice interes în ochii tehnicienilor noştri".

- M-ai convins! Şi de unde vrei să începem?

- N-aş zice să ne întoarcem cu vreo 10.000 de ani în urmă, deşi poate că au existat şi pe atunci minţi care au tresărit privind în noapte stelele, pe care le-au grupat în constelaţii şi au întrezărit astfel numărul şi forme geometrice. Dar aş vrea să aruncăm o privire la matematica babiloniană, la cea egipteană şi, apoi, bineînţeles, să admirăm pe matematicienii greci. Apoi, din aproape în aproape să ajungem la Georg Cantor care, introducând în matematica infinitul actual, ne-a apropiat chiar de Dumnezeu!

-Planul e aprobat, să vedem numai cum o vom scoate la capăt!

„Esenţa matematicii este libertatea ei"

G. Cantor

- Cu vreo 5000 de ani în urmă, babilonienii au început să-şi noteze, pe tăbliţe de argilă arse, nu numai evenimentele politice şi sociale, ci şi o mulţime de calcule şi unele însemnări de natură geometrică. Au arătat aceasta, săpăturile arheologice, începute pe la mijlocul secolului al XIX-lea. Au fost scoase astfel la iveală vreo 300 de tăbliţe cuprinzând însemnări de natură matematică teoretică si practică. Printre acele consemnări teoretice, să ne oprim la una, scrisă prin mileniul al doilea î.e.n. cunoscute sub numele de „*Plimpton 322*".

- Ea cuprinde, înscrise pe patru coloane valori ale numerelor a, b, c legate prin relaţia: $c^2 = a^2 + b^2$, cu alte cuvinte cunoscuta legătură dintre laturile unui triunghi dreptunghic.

- Iată, aşadar, o dovadă de netăgăduit că babilonienii cunoşteau teorema, pe care Pitagora a făcut-o cunoscută grecilor.

- În tabela amintită, prima coloană indică numărul liniilor respective, - de toate 15, - a doua cuprinde pe c, a treia pe b, şi a patra pe $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Mă întreb, ce 1-a îndemnat pe acest matematician să execute aceste calcule anevoioase pentru 15 valori diferite ale numerelor a, b şi c ? Căci ele nu au fost făcute în vederea vreunei aplicaţii practice, ci numai pentru plăcerea de a le fi executat.

- E adevărat, aceste calcule erau o cărare a minţii pentru liniştirea şi delectarea sufletească, a unora dintre acei ce locuiau în temple, o cărare paralelă cu aceea care duce spre divinitate. Şi numai bucuria pe care a cunoscut-o realizând aceste calcule, trebuie să-1 fi îndemnat să le înscrie pe acea tăbliţă de argilă.

- Iată încă două, de pe vremea lui Nabucodonosor. Una cuprinde următoarele serii numerice:

$$1+2+2^2+\ldots+2^9=2^{10}-1=1023 \text{ și}$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2=[1-(1/3)+10\cdot(2/3)]\cdot 55=385,$$

iar cealaltă valoare a lui $\sqrt{2}$ calculată prin două aproximări, una în sistemul sexagesimal și cealaltă în sistemul zecimal:

$$\sqrt{2}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1,414213.$$

- Însuși faptul că babilonienii au stabilit două sisteme diferite de numărare, acela cu baza zece și acela cu baza șaizeci, dovedește interes și dragoste pentru numere și numărare. Dacă mai adăugăm că și algebra făcea parte din cunoștințele lor matematice, nu ne putem îndoi că matematica era folosită de slujitorii templelor ca o practică spirituală.

- Iată și o problemă de geometrie teoretică, rezolvată cu ajutorul calculului algebric, care întărește observația matale:

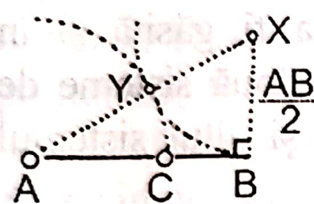
„Am adunat de șapte ori latura pătratului meu cu de unsprezece ori aria lui și am obținut 6,15. Află latura pătratului". Răspunsul este dat de ecuația de gradul al doilea: $7x+11x^2=6,15$ pe care babilonienii știau să o rezolve, cum știau să rezolve și unele ecuații de gradul trei sau patru.

- Să ne îndreptăm și spre templele preoților egipteni, căci venerația lor față de matematică se dovedește prin construirea piramidelor. Metodele folosite de ei în acest scop, precum și cunoștințele lor, au rămas în mare parte până azi secrete. De altfel o afirmă chiar și titlul manuscrisului lui Ahmes: „*Instrucțiuni pentru a cunoaște toate lucrurile secrete*", deși, în acest manuscris se găsesc, în cea mai mare parte, numai probleme practice.

- Piramidele! Din însăși construcția lor se degajă un sentiment de admirație de măreție, care îndeamnă sufletul să se îndrepte înspre divinitate. Uriașa piramidă a lui Keops, cu baza un pătrat de latură 230 metri, și având o înălțime de aproape 148 metri, rămâne o ofrandă veșnică oferită de preoții egipteni zeilor lor. Ea este o mărturie a faptului că printre slujitorii din temple mulți erau vrăjiți

de taina numerelor şi a combinaţiilor lor, de taina figurilor geometrice care i-au condus să descopere şi o minunată proprietate a unui raport dintre două segmente, cunoscute azi sub numele de ***tăietura de aur***.

- Hai să precizăm că prin *tăietura de aur* se înţelege raportul dintre două segmente *AC* şi *CB*, determinate pe segmentul *AB* de punctul *C*, astfel ca să existe proporţia: $AB/AC = AC/CB$ (1).

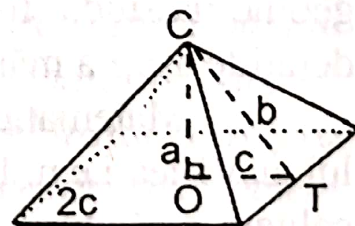


Adică, segmentul mai mare *AC* este medie proporţională între segmentul întreg *AB* şi celălalt *CB*. Dacă notăm aceste segmente: $AB = a$, $AC = b$, $CB = c$, atunci (1) devine: $a/b = b/c$ (2), unde $a = b + c$.

Raportul $b/c = \Phi$ (fi) a fost numit ***numărul de aur*** şi acum se notează de obicei cu litera grecească, Φ în amintirea numelui sculptorului Fidias, care a folosit acest raport în realizarea nemuritoarelor sale opere, din care se degajă o tainică armonie.

- Atunci să tragem şi concluzia: înlocuind în (2) pe $a = b + c$, avem: $(b+c)/b = b/c$ sau: $1 + (c/b) = b/c$ şi fiindcă $b/c = \Phi$, rezultă: $1 + \Phi^{-1} = \Phi$ sau $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ (3) şi $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,61\ldots$

Că egiptenii au cunoscut taina acestui raport o ştim de la Herodot. El a scris că a aflat de la preoţii egipteni, că forma maiestoasă a piramidei lui Keops se datoreşte faptului că aria triunghiului uneia dintre feţele laterale este egală cu aria pătratului care are drept latură înălţimea piramidei. Rămâne să verificăm: să notăm cu $a = OC$, înălţimea piramidei şi cu $2c$ latura pătratului bazei piramidei. Fie $OT = c$, o catetă a triunghiului dreptunghic *TOC*. Apotema piramidei, adică înălţimea unei feţe laterale a ei este $b = CT$. După indicaţiile lui Herodot, avem: $bc = a^2$ (4),



dar $b^2 = a + c^2$ (5), aşa că, ţinând seama de (4), rezultă: $b^2 - bc - c^2 = 0$, sau $(b/c)^2 - (b/c) - 1 = 0$ (6). Ori, ecuaţia (6) este identică cu relaţia (3) care caracterizează *tăietura de aur*.

- Nici acum nu se poate bănui prin ce metodă au ajuns preoţii egipteni la această relaţie, un singur lucru este clar, că liniştea din lăuntrul templelor era prielnică înălţării sufletului înspre meditaţii tainice, care să-l lege de divinitate şi de matematică.

- Preocuparea pentru sacru ar mai putea fi găsită şi în modul de a scrie numerele. Egiptenii au folosit două sisteme de notaţii zecimale, unul fiind sistemul hieroglific şi altul sistemul sacru sau hieratic.

În acesta din urmă existau semne speciale prin care se înlocuiau grupurile de semne ce se repetau ca atare dacă se folosea scrierea hieroglifică. În felul acesta scrierea hieratică era mai simplă, dar numai pentru iniţiaţi.

- Aşa fiind, pare explicabil faptul că grecii care au învăţat primele elemente de matematică de la egipteni şi babilonieni, au despărţit de la început noţiunile de matematică practică necesare în rezolvarea problemelor legate de activitatea zilnică, economică, de studiul matematicii pure, care îndrepta înspre meditaţie. Ele aveau, dealtfel, şi numiri deosebite, pe de o parte: „*arta de a calcula*" sau „*Logistica*" şi „*arta măsurătorilor geometrice*" sau „*Geodezia*", iar pe de altă parte, Aritmetica şi Geometria. Logistica nu avea nici un fel de legătură cu Aritmetica. La fel, geodezia măsura suprafeţele şi volumele figurilor şi ale corpurilor, pe când geometria studia forma figurilor geometrice independent de consideraţiile asupra mărimilor lor.

- Matematica grecească începe cu Thales din Milet, în secolul al VI-lea î.e.n. Despre el se spune că era negustor şi, în această calitate, a călătorit mult, până a ajuns în Egipt. Acolo a făcut cunoştinţă cu preoţii egipteni şi a fost iniţiat în taina religiei şi a matematicii.

- Da, odată ce a cunoscut adevăruri divine, desigur că nu l-a mai putut interesa negustoria şi a părăsit această ocupaţie. Întors la Milet el s-a dedicat studiului geometriei şi al filosofiei. A devenit unul din cei şapte înţelepţi ai antichităţii, lui atribuindu-i-se primele descoperiri matematice precise. Astfel în geometrie el a stabilit că: 1) unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale; 2) un triunghi este bine determinat dacă i se cunoaşte baza şi unghiurile alăturate ei; 3) laturile triunghiurilor care au unghiurile egale sunt proporţionale; 4) unghiurile înscrise într-un semicerc sunt drepte.

- Despre această ultimă teoremă se spune că Thales a fost aşa de impresionat de descoperirea ei, încât a adus jertfă un taur, ca să mulţumească zeilor că i-au arătat-o.

- Trebuie să fii cu adevărat dezlegat de măruntele preocupări zilnice ca să te poată copleşi frumuseţea acestui adevăr veşnic: oricare ar fi cercul, dacă alegi un punct pe el, şi-l uneşti cu extremităţile unui diametru care nu trece prin el, obţii un unghi drept! Surpriza pe care ţi-o provoacă acest rezultat o depăşeşte pe oricare alta determinată de un fapt divers şi-ţi îndreaptă gândul spre divinitatea care se manifesta în sufletul lui Thales sub forma zeilor.

- Dacă vrei, am putea citi câteva rânduri dintr-un articol al lui H. Poincaré, intitulat: „*Invenţia matematică* ” pe care eu l-aş fi intitulat, mai degrabă, „*Descoperirea matematică* ”.

Asupra acestei probleme a deosebirii dintre invenţie şi descoperire matematică trebuie numaidecât să revenim, natural, nu acum, când te rog să iei cartea şi să citeşti.

- „*Invenţia matematică este actul prin care spiritul omului pare să împrumute cel mai puţin din lumea exterioară, în care nu acţionează sau nu pare să acţioneze, decât prin el însuşi şi asupra lui însuşi, astfel că studiind procesul gândirii geometrice, putem spera să atingem ceea ce este mai esenţial în spiritul omenesc*”. Şi mai departe: „*Pare curios să se invoce sensibilitatea în demonstraţiile matematice care, se pare că interesează numai inteligenţa. Ar însemna să uităm sentimentul frumuseţii matematice, al armoniei*

numerelor şi formelor şi eleganţei geometrice. Este un adevărat sentiment estetic pe care-l cunosc toţi matematicienii adevăraţi. Şi aceasta este sensibilitate" (9).

- Pitagora era mai tânăr decât Thales cu vreo 50 de ani. S-a născut în insula Samos, aproape de Milet şi a călătorit prin Egipt şi Babilon, mai înainte de a se stabili la Croton, unde şi-a înfiinţat prima lui şcoală, care avea ca deviză: „*Totul este număr*". Însă Pitagora considera că numai numerele întregi sunt „*numere*", celelalte numere fracţionare sau iraţionale, erau privite ca „*mărimi*", pentru că ele proveneau din anumite măsurători. Numărul întreg era o noţiune primordială, de natură divină, un izvor mistic religios, exprimând însăşi esenţa lucrurilor. Se cunoaşte şi o rugăciune care îi era adresată: „*Binecuvântează-ne număr divin, Tu care ai născut pe Zei şi pe Oameni*".

- Încă de pe vremea lui Aristotel, propoziţia „*Totul este număr*", exprimată şi sub forma: „*Toate lucrurile posedă numere*", sau că: „*Toate lucrurile sunt numere*", constituia un paradox, observă L. Brunschvieg, căci numărul este o noţiune iar lucrurile sunt obiecte sau substanţe.

Cum s-ar putea pretinde ca numărul să fie la rândul său obiect ori substanţă? Şi iată cum rezolvă Brunschvieg dilema: „*în loc de a căuta trecerea de la o noţiune abstractă la realitatea concretă... i se poate reintegra numărului aplicaţia intuitivă de care el este neseparat, de a vedea un punct când se vorbeşte de unitate, iar când se vorbeşte despre numere, un grup de puncte desenând o figură, aşa cum desenează stelele o constelaţie. Înainte de a spune că lucrurile sunt numere, Pitagoricienii au conceput numerele ca lucruri, expresiile „numere pătrate" sau „numere triunghiulare" nu erau metafore, aceste numere erau efectiv, în faţa ochilor şi a spiritului lor, pătrate şi triunghiuri*" (10).

- Reprezentând numerele prin pietricele, Pitagora a stabilit legi numerice între puncte şi numere, care ne impresionează fie prin simplitatea fie prin armonia pe care o exprimă. De pildă, numerele

triunghiulare erau obţinute adăugând la baza triunghiului format din trei pietricele altele trei, apoi la următorul alte patru pietricele.

Numerele astfel formate sunt: $1, 1+2=3; 1+2+3=6; 1+ +2+3+4=10\ldots$ şi, în general: $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$.

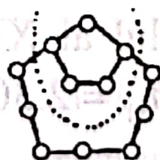
Din formula generală a numerelor triunghiulare apare că aceste numere reprezintă chiar aria triunghiului a cărui bază este numărul n şi înălţimea $(n+1)$.

- Numerele pătrate se obţin începând prin a aşeza în jurul unităţii „*gnomonii numerelor impare succesive*", ca să folosesc termenul „*gnom*", instrument antic format dintr-un par înfipt perpendicular în pământ, astfel ca el să formeze un unghi drept cu umbra lui.

Relaţia dintre aceste numere apare ca suma numerelor impare succesive: $1, 1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2, \ldots, 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

- Aşadar, un rezultat remarcabil: suma primelor n numere impare este egală cu n^2.

- În mod analog se formează numerele pentagonale, care rezultă din reunirea a trei numere triunghiulare, sau numerele hexagonale ce se formează prin alăturarea a patru numere triunghiulare etc.





Formula acestor numere a fost găsită de Hipsicle din Alexandria şi se exprimă prin formula generală: $N_{n,m} = (n/2)[2+(n-1)(m-2)]$, în care n este numărul de ordine al numărului respectiv, iar m arată numărul latu-

rilor poligonului. Aşadar, pentru numerele pentagonale, rezultă formula: $N_{n,5} = (n/2)(3n-1)$.

- Pitagoricienii s-au adâncit în studiul numerelor întregi, fiind impresionaţi de relaţiile ce le-au stabilit între numere şi divizorii lor. Ei au numit ***număr prim*** acela care se divide numai cu el însuşi şi cu unitatea şi ***număr compus*** acela care are şi alţi divizori. De la aceste noţiuni ei au ajuns la definirea ***numerelor perfecte***, a ***numerelor prietene***, precum şi la ***teoria proporţiilor*** şi a ***armoniei muzicale.*** Să vedem, mai întâi, care numere se numesc perfecte.

Numerele perfecte sunt acelea care se exprimă prin suma divizorilor lor. De pildă: $6 = 1+2+3$ sau $28 = 1+2+4+7+14$. În Aritmetica lui Nicomah din Gherasa, scrisă în veacul al II-lea e.n., se mai găsesc şi numerele 496 şi 8128.

- Dar în cartea a IX-a a Elementelor lui Euclid se dă formula generală pentru aflarea unui număr perfect, anume: $n_t = 2^t(2^{t+1} - -1) = 2^t p$, unde t este un număr natural, iar $p = 2^{t+1} - 1$ este un ***număr prim***. Din această formulă rezultă că primele patru numere perfecte sunt: pentru $t = 1, n_1 = 6; t = 2, n_2 = 28; t = 4, m_4 = 496;$ şi $t = 6, n_6 = 8128$. Problema aceasta a încântat pe mulţi matematicieni şi ea a fost cercetată în decursul Evului Mediu, dar abia în secolul al XV-lea Regiomontanus a reuşit să calculeze al cincilea număr perfect 33.550.336, pentru $t = 13$. Alte două numere n_{17} şi n_{19}, ultimul având 12 cifre au fost stabilite în secolul al XVI-lea de J. Scheybel, acela care a tradus în limba germană pe Euclid, apoi Marsenne a determinat, în secolul al XVII-lea al optulea număr perfect pentru $t = 31$, anume $n_{31} = 2.305.834.008.139.952.128$, care, cum se vede, are 19 cifre.

- Dar căutarea numerelor perfecte nu s-a oprit aici. Euler a regăsit, în 1750 pe n_{31} fără să fi cunoscut rezultatul anunţat de Marsenne în 1644. Ultimul număr despre care avem cunoştinţă a

fost calculat cu ordinatorul în 1964, are 3376 cifre şi a fost imprimat pe 12 pagini.

- Iată un alt exemplu de muncă multă şi gratuită, executată numai pentru bucuria de a o fi făcut, aşa cum se întâmplă şi când scrii o poezie sau când faci o rugăciune: „*Binecuvântează-ne, număr divin*".

- Tot aşa de mult au captivat şi ***numerele prietene***. După cum ştii, numirea lor este legată de povestea a doi prieteni care i-au cerut lui Pitagora să le definească prietenia şi Pitagora a răspuns: „*Sunteţi ca numerele 220 şi 284*". Nedumeriţi de răspuns, li s-a indicat să stabilească divizorii acestor numere, şi ei au găsit că numărul 220 are ca divizori pe: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, iar numărul 284 are ca divizori pe: 1, 2, 4, 71, 142. Făcând suma divizorilor lui 220 au aflat numărul 284 şi procedând la fel cu ceilalţi divizori au găsit numărul 220. Atunci au înţeles ei, că fiecare poartă în suflet tot ce-l preocupă pe celălalt, adică este ca şi eul celuilalt.

- Cu toată străduinţa celor pasionaţi de calcule, această pereche a rămas singură până în secolul al XVII-lea. Atunci a descoperit Fermat o nouă pereche de numere prietene şi anume: $A = 17.296$ şi $B = 18.416$.

Peste doi ani, a găsit şi Descartes alte două numere prietene şi anume: $A = 9.363.584$ şi $B = 9.437.056$.

Ambele rezultate au fost publicate de Mersenne în 1644. Peste un secol, în 1747, Euler a publicat un articol, intitulat „*Despre numerele prietene*" în care adaugă, la cele trei perechi cunoscute, alte 30 de perechi noi, prima fiind $A = 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$, $B = 2^2 \cdot 23 \cdot$ $\cdot 827$, iar ultima: $A = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 179$ şi $B = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$.

Peste trei ani el a mai găsit încă alte 29 de perechi de numere prietene, iar în 1939 numărul perechilor de numere prietene a ajuns la 390 !

- Tot lui Pitagora îi revine şi meritul de a fi stabilit o relaţie numerică prin care este exprimată ***armonia muzicală*** prin rapoarte de numere naturale. Povestea spune că atenţia lui Pitagora ar fi fost atrasă de sunetele care se auzeau în atelierul unui potcovar, provocate de izbirea ciocanelor de nicovală. Intrând în curtea potcovarului, el a văzut patru sclavi, care loveau pe rând nicovala cu câte un ciocan de mărime şi greutate diferită. Privindu-i a înţeles că trebuie să existe o legătură între sunetele emise de nicovală şi greutatea ciocanelor care o izbeau. În locul ciocanelor Pitagora a folosit coarde vibrante, fixate la ambele capete. El a stabilit astfel că tonul emis de o coardă bine întinsă depinde de lungimea coardei care vibrează. Dacă în locul coardei întregi face să vibreze numai o jumătate de coardă, atunci tonul se ridică cu o octavă, dacă vibrează numai 2/3 din coardă, tonul se ridică la 1/5 deasupra aceluia produs de coarda întreagă (cvinta), iar dacă vibrează 3/4 din lungimea ei, tonul este cu 1/4 deasupra sunetului produs de coarda întreagă (cvartă). Cu aceste date Pitagora a construit scara diatonică şi a formulat astfel prima teorie matematică despre armonia muzicală, care adevereşte că natura intrinsecă a sunetelor este legată de raportul dintre două numere întregi.

Pornind de la rapoartele a două numere, Pitagora a stabilit şi teoria numerică a proporţiilor. Ea a fost reluată de Euclid şi, în cartea a VI-a a Elementelor, găsim definiţia 20, formulată astfel: *„Numerele sunt proporţionale când întâiul este acelaşi multiplu sau aceeaşi parte sau aceleaşi părţi a celui de-al doilea ca al treilea faţă de al patrulea*" (11). Printre proporţii, Pitagoricienii au cercetat mai îndeaproape unele de natură particulară, compuse din trei numere în loc de patru, stabilind astfel anumite medii dintre două numere date. Prin felul cum aceste medii formează cu cele două numere date o proporţie, au fost luate în seamă: ***media aritmetică*** m_a, definită prin proporţia: $(a-m_a)/(m_a-c)=a/a$, de unde $m_a = (a+c)/2$; ***media geometrică*** m_g, definită prin proporţia: $a/m_g =$

$=m_g/c$, de unde $m_g=\sqrt{ac}$ şi ***media armonică*** m_h, definită prin proporţia: $(a-m_h)/(m_h-c)=a/c$, de unde $m_h=2/(a^{-1}+c^{-1})=$ $=2ac/(a+c)$.

- E clar că aceste valori medii între două numere a şi c nu sunt egale, media aritmetică fiind mai mare decât media geometrică.

- Să mai observăm şi că media armonică este legată de ***consonanţa muzicală***. Într-adevăr, dacă se consideră lungimea coardei vibrante caracteristică unui sunet ca unitate de lungime, atunci media armonică dintre lungimea coardei şi aceia a jumătăţii ei (adică a octavei acelui sunet) este: $m_h=(2\cdot1\cdot2^{-1})/(1+2^{-1})=$ $=2/3$, care reprezintă lungimea coardei ce corespunde cvintei sunetului. Combinând cele trei medii ale celor două mărimi date a şi c, Pitagora a pus condiţia ca m_g să fie medie proporţională între m_a şi m_h: $m_g/m_h=m_a/m_g$ sau $\sqrt{a\cdot c}\cdot[(a+c)/(2\cdot a\cdot c)]=(a+$ $+c)/2\cdot(\sqrt{a\cdot c})^{-1}$ sau $a\cdot[(a+c)/(2\cdot a\cdot c)]=[(a+c)/2]\cdot c^{-1}$. Ori, considerând $a=1$ şi $c=1/2$ se obţine o proporţie între cele patru distanţe care despart sunetele fundamentale din gama diatonică: lungimea fundamentală (1), octava (1/2), cvinta (2/3) şi cvarta (3/4); $1/[(2\cdot1\cdot2^{-1})/(1+2^{-1})]=[(1+2^{-1})/2]/(1/2)$ sau $1/(2/3)=$ $=(3/4)/(1/2)$. Această proporţie se numeşte ***proporţia perfectă*** sau ***proporţia muzicală***.

- Am putea zăbovi mult asupra frumoaselor proprietăţi ale numerelor întregi, ca de pildă asupra numărului 10, decada, care cuprinde primele patru numere: $10=1+2+3+4$, aşadar natura diferitelor specii de numere. El este format din atâtea numere pare cât şi impare: (1, 3, 5, 7, 9) şi (2, 4, 6, 8, 10); el cuprinde tot atâtea numere prime ca şi neprime (1, 2, 3, 5, 7) şi (4, 6, 8, 9, 10), este un număr triunghiular şi tot odată suma primelor trei numere triun-

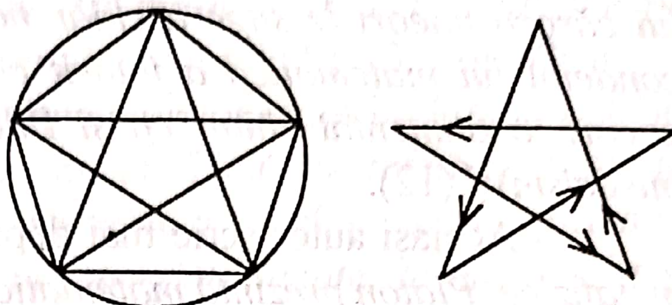
ghiulare: $10 = 1 + 3 + 6$. Pitagoricienii considerau că Dumnezeu a orânduit universul prin numere, El fiind unitatea iar lumea pluritatea. De aceea, ei considerau că ridicarea sufletelor ca să se unească cu Dumnezeu se putea realiza cu ajutorul matematicii care exprimă armonia. Numai armonia restaurează unitatea părţilor componente şi le modelează în cosmos. Armonia se exprimă prin rapoarte numerice iar acela care şi-a însuşit înţelegerea armoniei, devine el însuşi divin şi nemuritor.

- Dar odată cu această armonie, pitagoricienii au cunoscut şi cea mai groaznică dezamăgire, atunci când Hippas din Metopont a arătat că există mărimi ce nu se pot exprima prin rapoarte dintre două numere întregi.

- Da, teorema lui Pitagora, departe de a fi fost o teoremă demnă de adorat, a fost pricina tulburărilor legate de prezenţa, printre numere, a ***numărului iraţional***. Căci, pornind de la pătratul de latură 1, Hippias a arătat că lungimea diagonalei sale nu se poate exprima nici printr-un număr întreg şi nici prin raportul dintre două numere întregi, cu alte cuvinte diagonala pătratului de latură 1, este ***incomensurabilă*** cu latura lui. Nu mă pot opri să nu amintesc demonstraţia, prin reducere la absurd, pe care a dat-o Aristotel, deşi nu-i exclus ca ea să aparţină chiar şcolii pitagoriciene. Iat-o: Diagonala pătratului de latură 1 este $\sqrt{2}$. Să presupunem că $\sqrt{2} = a/b$, unde a şi b sunt numere întregi, iar a/b este o fracţie ireductibilă. Ridicând la pătrat, avem: $2b^2 = a^2$. De aici rezultă că a este par, deci fie $a = 2c$. Înlocuind, găsim: $b^2 = 2c^2$, aşadar şi b este un număr par, ceea ce contrazice ipoteza, deci fracţia nu a fost ireductibilă cum s-a presupus.

- Dezvăluind acest secret al numerelor iraţionale, Hippias a fost pedepsit de zei şi a murit într-un naufragiu. Pitagoricienii însă nu s-au mărginit la acest singur număr iraţional, ei au cunoscut şi folosit şi altele ca de pildă numărul de aur Φ, fără de care nu s-ar putea înscrie pentagonul regulat în cerc. Ei au cunoscut această

construcţie. Mai mult, ducând diagonalele acestui pentagon se obţine ***pentagrama***, figură pe care pitagoricienii şi-au însuşit-o drept emblemă.



- Figura din dreapta se poate trasa dintr-o singură trăsătură de condei şi Iamblic povesteşte despre un pitagorician bolnav şi sărac care cu toată îngrijirea pe care i-a dat-o hangiul unde ajunsese, a murit acolo. Neavând cu ce plăti hangiului, i-a cerut o tăbliţă pe care a desenat pentagrama şi 1-a rugat pe hangiu să o atârne pe perete. Mai târziu trecând pe acolo un alt pitagorician şi aflând povestea pentagramei, 1-a răsplătit pe hangiul omenos.

- Aş aminti că în Evul Mediu înscrierea pentagonului în cerc era un secret al pictorilor.

- Desigur, căci geometria lui Euclid a fost cunoscută în Europa abia în secolul al XVI-lea.

Fiindcă ne-am îndreptat înspre geometria pitagoriciană, să amintim că atunci când ei au descoperit trei dintre cele cinci poliedre regulate, anume tetraedrul, cubul şi dodecaedrul, au adus drept mulţumire zeilor un taur pe care l-au sacrificat !

- Nu-i de mirare, poliedrele regulate, în număr de cinci celelalte două: octaedrul şi icosaedru se spune că au fost construite de Theatet din Atena, elev a lui Teodor din Cirena), sunt figuri mărginite de poligoane regulate şi egale între ele şi se pot înscrie într-o sferă, toate având o frumuseţe remarcabilă.

- Despre cub, care are 6 feţe, 8 vârfuri şi 12 muchii, pitagoricianul Philolaus afirma că aspectul lui armonios se datoreşte faptului că numerele 6, 8 şi 12 formează o proporţie armonică: $8=(2\cdot 6\cdot 12)/(6+12)$.

- *„S-ar putea spune”*, observă Bourbaki, *„că Platon era, aproape obsedat de matematică, fără a fi fost el însuşi un creator*

în acest domeniu. El era la curent cu toate descoperirile matematicienilor contemporani, mulți dintre ei fiind prieteni sau elevi ai lui cărora uneori le sugera chiar noi direcții de cercetare... Sub condeiul lui matematica a folosit ca ilustrare sau ca model (și, uneori, a alimentat chiar, ca și Pilagoricienii, înclinarea înspre misticism)." (12).

- Același autor scrie mai departe: „*conform cu vederile lui metafizice, Platon prezintă matematica drept o cale de a ajunge "la adevărul în sine" și la faptul că "obiectele" cu care se ocupa au o existență proprie în lumea ideilor*" (l. c. pag. 24). Într-un pasaj din „*Republica*", precizează chiar și în ce constă metoda matematică.

- Să-l cităm în traducerea lui Noica: „*Cred că tu știi că geometrii, aritmeticienii și cei ce se îndeletnicesc cu astfel de lucruri, după ce postulează imparul și parul, formele și cele trei feluri de unghiuri, cât și cele înrudite cu acestea, potrivit cu fiecare dintre metode, le consideră pe acestea "postulate" presupunându-le cunoscute și nu cred de cuviință să le explice nici lor înșiși, nici celorlalți, socotindu-le cu totul evidente. Pornind de la acestea parcurg tot restul și sfârșesc prin a cădea de acord asupra chestiunii pe care intenționează să o cerceteze...* " (13).

- Platon a fost foarte impresionat de faptul că există numai cinci poliedre regulate și că există o infinitate de poligoane regulate. El a considerat că Dumnezeu, când a creat lucrurile din amestecul în care se aflau, le-a dat cea mai mare perfecțiune posibilă. El a compus astfel, cele patru elemente ale Universului: focul, aerul, apa și pământul dându-ne ca model forma celor patru corpuri geometrice perfecte și anume a tetraedrului care reprezintă focul, a icosaedrului - apa, a octaedrului - aerul și a cubului - pământul. Despre dedocaedru a scris: „*rămâne încă o combinație, a cincia, care să-i deseneze epura, zeii au luat-o ca modelul Universului* ".

- Deși nu a fost matematician, Platon a considerat că studiul geometriei este necesar în filosofie și de aceea a scris pe poarta de la intrare în grădina sa: „*Nimeni nu intră aici, dacă nu-i geometru*".

În „*Republica*" găsim: „*Geometria este ştiinţa a ceea ce veşnic este. Ea reprezintă un mijloc de a atrage sufletul spre adevăr şi de a pregăti inteligenţa filosofului să îndrepte în sus facultăţile pe care, în chip nepotrivit, le îndreptăm în jos* " (1.c.13. pag. 329).

O cercetare mai amănunţită a dialogurilor lui Platon a stabilit că există cel puţin 120 pasaje în care Platon se referă la chestiuni privind matematica. Tot din „*Republica*" sunt şi aceste afirmaţii: „*Calculul şi Aritmetica sunt în întregime legate de număr... deşi aceste discipline apar ca fiind în stare să conducă spre adevăr*"; însă, adaugă tot el mai departe: „*nu folosind calculul în chip profan, în vederea vânzării şi cumpărării, precum negustorii şi precupeţii... ci astfel ca să se ajungă la contemplarea naturii numerelor cu ajutorul intelectului... pentru a face sufletul însuşi pregătit să se întoarcă lesne dinspre devenire către adevăr şi fiinţă*" (1. c. pag. 326).

- Geometrul grec, spune Boutroux, „*nu urmăreşte lucrurile complicate. Scopul lui nu-i să-şi frământe mintea, să folosească şiretenii ca să ajungă la cunoaşterea faptelor puţin accesibile, a căror complicaţie însăşi este un semn de impuritate*" (l.c.8.pag.50).

- Într-adevăr, Platon, nici nu considera că figurile geometrice ar avea nevoie de o reprezentare grafică, dat fiind că raţionamentul geometric nu se referea la figurile desenate, căci imaginea desenată nu corespundea aceleia din minte. Totuşi, pentru ca să se stabilească un criteriu precis, după care să se poată construi figurile, s-a plecat de la faptul că prin două puncte se poate duce o dreaptă şi, dacă se cunoaşte centrul şi raza unui cerc, acel cerc se poate construi. Aşadar, s-a tras concluzia că o figură plană se poate construi numai cu rigla şi compasul.

- De aici au început toate discuţiile de mai târziu, între geometrii greci care, neputând desena în acest mod, anumite figuri, au recurs la alte mijloace de a le desena, mijloace pe care cei conservatori nu le acceptau !

- Aristotel a fost elevul lui Platon. Şi el recunoaşte că: „*Actul propriu al omului fiind gândirea, fericirea se poate dobândi prin*

activitatea ei dusă la cea mai înaltă perfecțiune, care nu poate fi atinsă decât în stare de contemplare intelectuală, când gândirea se are numai pe sine obiect al cugetării sale. Atingând acest moment de interiorizare şi înălțare teoretică, sufletul omenesc se uneşte cu inteligența divină şi trăieşte cu aceasta, în ea, imobil, impasibil, nemuritor"(14).

- Eu zic să ne oprim aici. Pentru o nouă discuție cred că ar fi interesant să vedem cum au pătruns matematicile în lumea creştină. Despre această problemă a scris şi Paul Tannery aşa că, data viitoare voi aduce cu mine volumele sale în care am găsit referiri la acest subiect.

> ***„Frumuseţea intelectuală îşi este ei însăşi suficientă şi pentru ea, savantul se condamnă la munci grele şi penibile"***
>
> *H. Poincaré*

- Într-unul din studiile sale asupra istoriei matematicii, Paul Tannery se ocupă de religia ultimilor matematicieni din antichitate şi constată că printre comentatorii lucrărilor de matematică rămase de la greci, se găsesc şi mulţi creştini (15). De pildă, spre sfârşitul secolului al treilea a trăit Anatolius, mai târziu episcop în Laodiceea. Deşi, el a predat la Şcoala din Alexandria filosofia aristotelică, era un adânc cunoscător al matematicii clasice şi, printre altele, a scris vreo 10 cărţi de introducere în aritmetică. Din fragmentele care au rămas din ele, se poate stabili că aceste cărţi reprezentau lucrările elementare destinate studenţilor în filosofie şi aveau ca subiect diferite ramuri din matematică. De pildă, într-una dintre aceste lucrări se găsesc elemente de algebră, compuse după aritmetica lui Diofant şi chiar dedicate *„ereticului Diofant"*. Paul Tannery observă că între *„eretici* şi *„creştini"*, cu toată lupta dintre ei, existau asemenea relaţii de prietenie, în particular, în acest caz şi Diofant, la rândul lui, a dedicat tratatul său de aritmetică în 13 volume, dintre care azi nu au mai rămas decât primele şase, lui Dionisios, episcop de Alexandria între 247-265, azi cunoscut sub numele de Denis din Alexandria, care între anii 231-247 a fost conducătorul studenţilor creştini din şcoala din Alexandria şi profesorul lui Anatolius. Iată şi dedicaţia lui Diofant: „*Cunoscând, prea onorate Dionisios, cât de mult vă pasionează problemele numerice, am început printr-o explicaţie asupra naturii numerelor şi a fundamentelor pe care se bazează subiectele tratate. Acestea pot părea, la prima vedere, foarte grele de înţeles, căci nu sunt deloc cunoscute. Începătorii se pot descuraja uşor, dar pentru dumneavoastră vor fi uşor de înţeles,*

datorită entuziasmului dumneavoastră şi explicaţiilor mele". Această dedicaţie îl face pe Paul Tannery să se întrebe dacă nu cumva, aceste volume au fost scrise de Diofant chiar la îndemnul lui Dionisios, atunci când acesta era conducătorul studenţilor creştini.

- Lucrul nu-i imposibil, fiindcă după câte văd, Tannery mai aduce un argument foarte serios în favoarea acestei ipoteze, anume că Diofant „ *pune toate problemele numerice (afară de una singură) sub formă abstractă şi rupe astfel cu tradiţia de a învălui enunţurile în istorioare, ca de pildă acelea a epigramelor din Antologie... Dacă ţinem seamă că acele istorioare, folosite în enunţuri, erau luate, în cea mai mare parte, din mitologie, se înţelege că, dacă lucrarea era dedicată în realitate studenţilor creştini, Dionisios şi Diofant au ţinut să-i îndepărteze pe studenţi de asemenea atracţii. Ar fi un exemplu de faptul că scrupulul religios a contribuit efectiv la procesul abstracţiei ştiinţifice*" (l. c. pag. 537).

- Un alt matematician creştin, care a trăit în Alexandria, la începutul secolului al VI-lea, a fost Ioan Philopon. Printre altele, el a scris un comentariu asupra Aritmeticii lui Nicomah. Pe atunci, Şcoala din Alexandria avea încă un caracter mixt, din punct de vedere religios, dar, mai târziu, ea a devenit pe deplin creştină.

- Printre matematicienii creştini din Bizanţ, se afla, la începutul secolului al VI-lea Antemiu din Trales, probabil, conducătorul şcolii de arhitecţi înfiinţată de Justinian şi din cadrul căreia au fost cei care au clădit Sf. Sofia. Antemiu avea reputaţia de mare matematician şi, de aceea, i se spunea şi Arhimede din Trales, însă din lucrările lui nu au mai rămas decât fragmente. Lui îi sunt dedicate „*Comentariile lui Eutokios asupra Conicelor lui Apolloniu*" şi tot Eutokios a dedicat „*Comentariile asupra lui Arhimede*" unui anume Petre, nume purtat atunci numai de creştini; Tannery bănuieşte că şi Eutokios a fost creştin.

În Occident, după marile invazii care au dezbinat Imperiul Roman, studiul matematicii s-a putut continua numai în interiorul mănăstirilor, singurul loc unde se menţinea pacea prin citirea rugă-

ciunilor şi a cărţilor sfinte. Însă majoritatea textelor matematice fuseseră luate de arabi şi în bibliotecile de acolo rămăseseră puţine dintre textele de seamă. Dar atâtea câte erau, au fost folosite de călugări care le copiau şi căutau să compună chiar şi alte lucrări cu caracter matematic care să folosească învăţământului în şcolile din lăuntrul mănăstirilor. Printre autorii creştini, ale căror lucrări au avut o influenţă importantă asupra învăţământului matematic din şcolile medievale până la sfârşitul secolului al XI-lea, a fost şi A.M.S. Boetius (480-524) născut la Roma. A avut mai multe funcţii importante în conducerea statului dar, căzând în dizgraţie, a fost închis şi apoi ucis. În închisoare a scris un tratat de filosofie în care discută problema responsabilităţii morale în lumina părerilor lui Platon şi Aristotel. Aritmetica sa, în două volume, pe care a scris-o pe când avea 20 de ani, este o traducere liberă a cărţii lui Nicomah. Ea a fost copiată şi recopiată de-a lungul unui întreg mileniu şi a folosit ca izvor de inspiraţie pentru toate cărţile scrise după el. A mai compus o astronomie şi o geometrie care cuprinde câteva pasaje din primele patru cărţi ale Elementelor lui Euclid, fără însă a fi date şi demonstraţiile teoremelor enunţate. Şi această geometrie a avut multe variante, ea fiind copiată, adăugată sau modificată, de către călugării din diferite mănăstiri.

Un alt călugăr, Cassiodor, a fost elev a lui Boetius, a scris şi el pe la începutul veacului al VI-lea, o Aritmetică, în care rezumă aritmetica lui Boetius şi, totodată, inserează pasaje din Sf. Scriptură prin care vrea să dovedească că Dumnezeu a creat Universul bazându-se pe noţiunile de număr, măsură şi greutate. El consideră acest fapt ca o raţiune suficientă pentru a studia aritmetica.

În jurul anului 600 a apărut „*Etimologiile*”, o enciclopedie în 20 de volume ale savantului episcop Isidor din Sevilla (570-636), volumul al treilea fiind dedicat Aritmeticii, inspirată şi ea de Aritmetica lui Boetius. El pune în evidenţă o mistică a numerelor şi consideră că dacă s-ar suprima numărul din toate lucrurile câte există, atunci ar dispărea şi lucrurile.

- În secolul al VIII-lea, Carol cel Mare a dezvolt învățământul bisericesc, dispunând să se creeze școli noi pe lângă fiecare mănăstire sau catedrală; în felul acesta s-a dezvoltat și atracția pentru învățământul matematic. Foarte interesante sunt scrisorile cu conținut geometric care s-au schimbat în acea vreme între unii profesori din acele școli și care au fost publicate de Paul Tannery (16). Nu conținutul lor, cu un nivel cât se poate de coborât, „*nedepășindu-l pe acela pe care îl atinseseră grecii înainte de Pitagora*" ne interesează, ci faptul în sine, că acești călugări, profesori și conducători de școală, având o cultură remarcabilă și serioase cunoștințe aritmetice, doreau să restabilească relațiile geometrice pe care nu mai aveau de unde să le afle, dar despre care știau că fuseseră cândva stabilite. Iată obiectivul principal al discuției începute prin 1025, între Ragimbold din Cologne și Radolf din Liege cuprinsă în cele opt scrisori, adresate reciproc. Așa de pildă, una dintre întrebările adresate de Ragimbold este: „*În Comentariul său asupra categoriilor lui Aristotel, Boetius spune: Noi știm că suma celor trei unghiuri interioare ale unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte.*" Ori, urmează Paul Tannery, „*ceea ce-l preocupă pe Ragimbold, nu-i demonstrația acestei teoreme ci semnificația cuvântului **interior**, căci, dacă Boetius l-a folosit, înseamnă că trebuie să existe și unghiuri **exterioare**: care sunt acelea* ?" Această întrebare îl preocupa mai demult pe Ragimbold; o pusese chiar și episcopului Fulbert când a trecut prin Chartres. Atunci ei admiseseră că ***interior*** poate însemna ***ascuți*** pe când ***exterior***, ***unghi obtuz***.

- Radolf din Liege face altă ipoteză: „*Unghi interior este acela care se referă la o suprafață plană, pe când unghiul exterior, cel ce se leagă de un solid, de exemplu un cub*". Cum pentru noi nu prezintă acum interes și celelalte întrebări puse în cele opt scrisori, să ne oprim asupra altui profesor, tot din Liege, anume Francon, preocupat de o problemă cu mult mai complicată, anume de cvadratura cercului.

- În 1050 el a scris o lucrare pe această temă, din care se constată, că a aflat de această problemă nu dintr-o carte de Geometrie, ci din Comentariile lui Boetius asupra Categoriilor lui Aristotel, în care autorul se referă la problema respectivă ca la un exemplu de problemă a cărui soluţie este posibilă, dar care nu a fost cunoscută decât după moartea lui Aristotel.

- Vrei să spui că Boetius a considerat soluţia aproximativă, stabilită de Arhimede drept un rezultat exact ?

- Desigur, şi după cum remarcă Paul Tannery, Francon admitea ca exacte şi soluţiile grafice stabilite cu ajutorul curbelor mecanice. Dar, ori cum ar fi, Francon consideră problema cvadraturii cercului cu totul altfel decât aşa cum o considerăm noi. El credea că aria cercului se determină exact, prin formula transmisă de agrimensorii romani, anume că se înmulţeşte pătratul diametrului cu 11 şi rezultatul se împarte cu 14. Aşa că, dacă un cerc are diametrul 14, atunci aria lui este echivalentă cu aceea a unui dreptunghi cu laturile 11 şi 14. Iar problema cvadraturii cercului era: *„cum să se construiască un pătrat echivalent cu acest dreptunghi ?”* Asupra acestei probleme Francon a scris 6 cărţi, dar fără a fi ajuns la un rezultat definitiv, căci el nu ştia cum se construieşte media proporţională între două segmente de dreaptă cunoscute. Şi, ceea ce este foarte interesant, Francon a avut şi a consultat geometria lui Gerbert, ceea ce înseamnă că această problemă nu era tratată nici acolo.

- Nivelul cunoştinţelor matematice a început să crească abia pe la sfârşitul secolului al XI-lea şi începutul celui de al XII-lea când, numărul elevilor care absolveau şcolile de pe lângă catedrale, mărindu-se foarte tare, s-a pus problema de a se crea Universităţile şi, când, totodată, au început să apară primele traduceri în latineşte ale cărţilor de matematică scrise în limba arabă. Printre cei mai renumiţi profesori ai Universităţii din Paris a fost călugărul dominican Jordanus Nemorarius, care a murit în 1237, după ce s-a întors dintr-o călătorie făcută la Locurile sfinte. El este considerat ca înte-

meietorul școlii medievale de mecanică. A scris numeroase cărți de Aritmetică, Algebră, Geometrie ș.a. Tot în secolul al XIII-lea a trăit și Campanus de Novara, canonic de Paris, care a tradus în latinește Elementele lui Euclid, folosindu-se în acest scop de traduceri în limba arabă precum și de o traducere latinească anterioară, a lui Adelard din Bath, făcută cu un secol mai înainte. În secolul al XIV-lea cel mai important matematician, filozof și teolog din Europa apuseană a fost Tomas Brawardin (1290-1349), arhiepiscop de Canterbury. Printre multele cărți pe care le-a scris se află o Aritmetică și o Geometrie; el mai este considerat și ca unul dintre precursorii Calculului diferențial și integral. O altă față bisericească, matematician de seamă, a fost Nicolae Oresme (1325-1382) episcop de Lisieux. În cartea sa „*Algorismus Proportionium*" el se ocupă cu seriile infinite, a introdus noțiunea de indice (exponent) fracționar și a îmbogățit mult terminologia matematică franceză.

- Cu cardinalul Nicolae de Cusa (1401-1464) ne aflăm în plină Renaștere. Și pe el l-a pasionat determinarea ariei cercului, respectiv aflarea numărului *n*. El a stabilit o metodă ingenioasă prin care credea ca a determinat această valoare; era însă numai o bună aproximare. Tot în Italia, mai întâi ca profesor de matematică la Veneția, apoi la Florența și Roma, îl întâlnim pe călugărul franciscan Luca Pacioli (1445-1514). El a publicat a carte de largă răspândire, anume „*Suma de aritmetica, geometria, proportioni et proportionalita*", scrisă în limba vorbită. Prieten cu Leonardo Da Vinci, a mai publicat și „*Divina proportione*", în care toate figurile poligoanelor regulate și ale poliedrelor, legate de tăietura de aur, pe care el a numit-o „*proporție divină*", au fost executate de Leonardo Da Vinci.

- Tot un mare pasionat de matematică a fost și preotul german Bartolomeus Pitiscus (1561-1613) care a publicat la Frankfurt, în 1613, cartea intitulată „*Thesaurus mathematicus sive canon sinum*", în care se găsesc calculate de el, Tabelele liniilor trigonometrice din 10" în 10".

- Deşi nu am amintit decât o parte dintre membrii biserici-lor creştine care au contribuit, prin pasiunea lor pentru matematică, chiar când în jurul lor domnea haosul şi cruzimea războaielor, cred că putem încheia aici discuţia noastră.

Infinitul ! Niciodată alt subiect nu a tulburat așa de adânc spiritul omului.

D. Hilbert

- Aş vrea să începem convorbirea răsfoind împreuna cartea lui C. A. Valson despre viața lui Cauchy. O am aici, în noua prezentare a lui Rene Taton (17).

- Te înțeleg. Celebrul matematician Augustin Louis Cauchy (1789-1857) a fost un om profund religios şi a ținut să o spună. În noua editare a lui Taton, acesta îi impută lui Valson „*că a accentuat prea mult activitatea de creştin militant a lui Cauchy, în loc să fi dat o mai mare atenție activității lui matematice*"! Văd că în biografie, capitolele XII-XVI sunt dedicate acestui domeniu.

- Pentru noi, însă, tocmai aceste capitole sunt acelea care ne interesează, căci nu ne-am propus să discutăm istoria matematicilor ci istoria matematicienilor care au crezut în divinitate şi au simțit că matematica este o cale ce te apropie de ea. Aşa cum a făcut-o Cauchy. Iată cuvintele pe care le-a spus Cauchy şi pe care Valson le-a ales ca motto la capitolul XII: „*M-am adâncit în studiul ştiințelor umane şi am recunoscut, din ce în ce mai mult, adevărul cuvintelor lui Bacon: «Dacă puțină filozofie ne face necredincioşi mai multă ştiință ne readuce la credință»*. La această mărturisire a lui Cauchy, Valson a adăugat: "*Nu-i rar să întâlneşti la savanți sentimente religioase; putem spune că aceste sentimente sunt rezultatul imediat al întregii ştiințe profunde. Oamenii care îşi petrec viața studiind marile legi ale naturii şi dacă o fac într-un spirit cu adevărat filozofic, străduindu-se să se urce la originea lucrurilor şi la izvorul tuturor adevărurilor, întâlnesc în mod necesar, în calea lor, ideea unui Dumnezeu Creator, a cărui putere şi înțelegere străluceşte peste tot în Univers.*"

- Hai să citim „Profesiunea de credinţă" scrisă de Cauchy, dar mai înainte să ne oprim asupra observaţiei lui Valson: *„Acest caracter de creştin practicant a lui Cauchy este cu atât mai remarcabil cu cât împrejurările în mijlocul cărora trăia păreau că se pretează mai puţin. Epoca în care s-a născut era a necredincioşilor. În societatea europeană se petrecuse o mare schimbare: necredinţa domnea peste tot*". Acum, să citim şi „profesiunea de credinţă".

- „Eu sunt credincios, adică eu cred în divinitatea lui Isus Hristos alături de Tycho-Brahe, Copernic, Descartes, Newton, Fermat, Leibniz, Pascal, Grimald, Euler, Guldin, Bascovich, Gerdil, împreună cu toţi marii astronomi, toţi marii geometri din secolele trecute... Convingerile mele nu sunt rezultatul prejudecăţilor din naştere, ci ale unui examen aprofundat. Sunt catolic sincer, cum a fost Corneillene, la Bruyere, Bossuet... Fenelon, cum au fost şi sunt încă un număr de oameni dintre cei mai de seamă din epoca noastră, dintre acei care aduc cea mai mare cinste ştiinţei, filosofiei, literaturii, care au ilustrat cel mai mult Academiile noastre. Împărtăşesc convingerile adânci care le-au arătat, prin cuvintele lor, prin acţiunile şi prin scrierile lor, atâţia savanţi de prin rang: Ruffini, Hauy, Laennec, Ampere, Pelletiere, Freycinet, Coriolis şi, dacă nu numesc pe ceilalţi de frică de a nu le răni modestia, pot spune, cel puţin, că-mi place să regăsesc întreaga nobleţe, întreaga generozitate a credinţei creştine în iluştrii mei prieteni, în creatorul cristalografiei, în inventatorul chininei şi a stetoscopului, în navigatorul celebru care a condus Urania şi al nemuritorului autor al electricităţii dinamice".

De la această „mărturisire" vreau să trec la alta, din cartea lui Wearner Heisenberg „Paşi peste graniţă", te rog să asculţi: „Atunci când, în secolul al XVII-lea, ştiinţa a fost întemeiată de Kepler, Galilei şi Newton mai persista încă acea imagine a naturii din Evul Mediu, care vedea în natură, înainte de toate, creaţia lui Dumnezeu. Natura fiind considerată drept opera lui Dumnezeu,

oamenilor din acel timp li s-ar fi părut fără sens să discute asupra unei lumi materiale independentă de Dumnezeu”. Ca un document al acelei epoci, aş dori să citez cuvintele cu care Kepler şi-a încheiat ultimul volum al „Armoniei cosmice”; „Îţi mulţumesc Dumnezeule, Creatorul meu, că mi-ai îngăduit să văd frumuseţea în opera creaţiei Tale şi să mă bucur de lucrarea mâinilor Tale. Iată am încheiat opera către care m-am simţit chemat: am pus în valoare talentul pe care mi l-ai dăruit, am făcut cunoscută măreţia operelor Tale oamenilor, care vor citi mărturisirile, aşa cum spiritul meu mărginit a putut să le înţeleagă” (18).

- Acum hai să citim câte ceva şi despre unii dintre matematicienii amintiţi de Cauchy. De pildă despre Descartes (1596-1650) găsim anumite date în cartea lui E. T. Bell: „Descartes a fost acuzat de ateism, nimic mai fals. Ideile lui religioase erau de o simplitate naturală în ciuda scepticismului său raţionalist. Într-adevăr, el compara religia lui cu aceea a doicei de la care a primit-o şi spunea că i se pare la fel de odihnitor să se sprijine, pe una ca şi pe cealaltă”(19).

- Mai mult, era un credincios practicant căci, odată, ca să mulţumească Sfintei Fecioare că l-a ajutat să-şi limpezească gândurile, a făcut un pelerinaj la Notre Dame de Lorette. Dar să ne oprim la ziua de 10 noiembrie 1619, pe care Descartes o considera cea mai importantă din viaţa lui, fiindcă ea a decis asupra viitorului său. În ajunul acestei zile a avut trei vise, unul după altul, care l-au impresionat foarte tare. El era atunci în armată. În primul vis, Descartes se vedea alungat de vânturi puternice, din siguranţa colegiului sau a bisericii sale, către un alt loc, pe care vântul nu-l putea clătina; în al doilea se vedea observând o furtună teribilă cu ochii ştiinţei lipsiţi de orice superstiţie şi îşi dădea seama că furtuna, odată văzută aşa cum este, nu-i poate pricinui nici un rău; în al treilea, el visa că recita un poem de Ausonius, începând prin aceste cuvinte: „Ce cale trebuie să urmez în viaţa mea ?”. Mai mult, Descartes spune că s-a trezit plin de entuziasm (probabil în sensul mistic al cuvântului) şi că, aşa ca în al doilea vis, i s-a relevat cheia magică care-i

va deschide calea la comorile naturii şi că-l va pune în posesiunea adevăratelor fundamente ale oricărei ştiinţe. Ce anume a fost această cheie misterioasă? Se pare că Descartes nu a spus-o nimănui explicit, dar se crede că e vorba de aplicarea algebrei la geometrii, într-un cuvânt, de geometrie analitică şi, mai general, de explicarea fenomenelor naturale prin matematică, adică de fizica matematică (1.c.19. pag. 51).

- De atunci, el s-a retras din armată şi a petrecut următorii cinci ani în studiul matematicilor pure, punând bazele geometriei analitice. La vârsta de 32 de ani, fiind la Paris, Descartes s-a împrietenit cu doi dintre cardinalii cei mai influenţi şi aceştia îl determină să înceapă a-şi desăvârşi opera. Dar abia la 41 de ani se hotărăşte să-şi publice vestita sa lucrare: „Discurs asupra metodei" în care enunţă celebra frază „gândesc deci exist". El leagă astfel realitatea experienţei lui Dumnezeu de faptul că noi avem cunoştinţă de această realitate.

- Într-adevăr, Descartes considera că omul se poate îndoi de existenţa reală a lucrurilor din jurul lui, a lucrurilor pe care le cunoaşte cu ajutorul simţurilor, căci simţurile se înşeală. Un băţ cufundat în apă apare frânt deşi, în realitate, el este drept, două linii paralele par că se întâlnesc undeva în depărtare, pe când ele nu se întâlnesc de fapt niciodată. Cunoaşterea adevărată se poate obţine numai prin gândire şi aceasta i-a fost insuflată omului de Dumnezeu. Omul gândeşte îndoindu-se şi dacă el poate cugeta corect, aceasta se datoreşte perfecţiunii pe care Dumnezeu a pus-o în om. Acest lucru se poate constata din claritatea şi precizia care învăluie noţiunile matematice, din demonstraţiile care duc la adevărurile matematice, adevăruri care există nu numai în mintea noastră ci şi în realitatea din afara gândirii noastre. Dacă avem în faţă un triunghi plan, atunci suma unghiurilor lui este egală cu două unghiuri drepte; dacă avem de-a face cu un pătrat, atunci diagonalele lui se taie în unghi drept. Dumnezeu a creat o serie de adevăruri veşnice, printre care sunt şi cele matematice. Elementele matematice, ca întinderea

lucrurilor în spațiu, sunt însuşiri care rămân neschimbate şi le aflăm cu ajutorul rațiunii. De aceea, cunoaşterea riguroasă este posibilă dacă reducem elementele fizice ale lucrurilor la noțiuni matematice, fiindcă matematica studiază în lucruri ceea ce se referă la număr, măsură, figură, spațiu sau mişcare. Într-o scrisoare adresată lui Mersenne, în 1638, vorbind despre Galileu, el arată că acesta "se străduieşte să cerceteze obiectele fizice cu ajutorul demonstrațiilor matematice. În această privință, sunt cu totul de acord cu el şi socot că nu există alt mijloc pentru căutarea adevărului" (20).

- După Descartes, Cauchy îl numeşte pe Newton, (1643-1727). În secolul al XVII-lea, ştiința a cunoscut o dezvoltare comparabilă cu aceea din epoca elenismului şi, apoi, cu cea din epoca noastră. Acela care i-a deschis calea lui Newton către matematică a fost marele matematician Isaac Barrow care, în 1663, era profesor la Universitatea din Cambridge. Prezentând cartea pe care Isaac Newton a publicat-o întâia oară în 1686, „Principiile matematice ale filosofiei naturale" (21), astronomul Edmond Haley a închinat matematicii o odă. În traducerea în limba română făcută de A. Naum, în hexametri, ea începe astfel:

„Iată şi-a cerului lege şi cumpăna lumii divine,
Măsurătoarea lui Jupiter iat-o şi legile care
Nu le-a călcat nici părintele lumii, Atotfăcătorul,
Când i-a urzit începutul şi iat-ale lumii temeiuri
Puse de dânsul..."(1.c.21, pag. 9).

- În prefața la ediția a doua a aceleiaşi lucrări, apărută în 1713, astronomul Roger Cotes scria: „Excelenta operă a lui Newton se prezintă ca o cetate foarte întărită, împotriva atacurilor ateiştilor: căci nici nu vei putea lua mai bine din alt loc decât din această tolbă, săgețile împotriva hoardei necredincioase" (1.c. pag. 23). Şi, iată în „Scolia generală" de la sfârşitul volumului, găsim chiar vorbele lui Newton: "Acestea toate (sistemul solar) le guvernează, nu ca sufletul lumii ci ca Domnul Universului. Şi, din cauza stăpânirii sale, se numeşte de obicei Domnul Dumnezeu, adică împărat universal...

Dumnezeul suprem este o fiinţă eternă, infinită, absolut perfectă: dar o fiinţă oricât de perfectă fără stăpânire nu e Dumnezeu. Căci zicem: Dumnezeul meu, Dumnezeul vostru, Dumnezeul lui Israel, Zeul Zeilor, Domnul Domnilor.... Cuvântul Dumnezeu uneori înseamnă Domn: dar nu orice Domn este Dumnezeu. Dominaţia unei fiinţe spirituale constituie un Dumnezeu... şi, din stăpânirea adevărată, urmează că Dumnezeul adevărat este viu, inteligent şi puternic... Este etern şi infinit, atotputernic şi atotştiutor, adică durează din etern în etern, este prezent din infinit în infinit, toate le guvernează şi toate le cunoaşte care sunt sau pot fi "(1.c. pag. 417).

- Din aceste rânduri, pe care mi le-ai citit, se vede clar că Isaac Newton a fost un om cu adevărat credincios. O subliniază, de altfel, şi traducătorul, prof. Victor Marian, în biografia cu care îşi încheie traducerea: „Newton era un om conştiincios şi religios ducând o viaţă morală; unul dintre contemporanii săi îl caracterizează ca *"sufletul cel mai curat pe care 1-a cunoscut"* (1. c. pag. 435). Se povesteşte că Newton nu permitea să se vorbească de rău despre religie, iar odată, pe când Haley, care nu avea asemenea scrupule, a făcut unele glume pe această chestie, Newton 1-a întrerupt cu aceste cuvinte: *"Eu am examinat aceste lucruri, dar dumneata nu ai făcut-o"*.

- Isaac Newton a pus bazele matematicii moderne, perfecţionând sau inventând metode noi, în diferitele ramuri ale matematicii. Din 1705, când avea 63 de ani, a început să studieze teologia şi a scris despre profeţi. În 1707 a publicat Aritmetica universală şi în 1711, Analiza prin serii infinite. Polemica lui cu Leibniz, legată de prioritatea Calculului diferenţial, a început în 1708 şi a durat până în 1716.

- Vechii greci nu au bănuit existenţa legii atracţiei universale. Ea a fost descoperită de Newton, bazându-se pe cele trei legi fundamentale ale mişcării planetelor, stabilite de Kepler.

- Am vorbit, mai întâi, despre Newton, ca să respectăm ordinea în care a înşirat Cauchy pe matematicienii religioşi şi credincioşi dar, cronologic, după Descartes ar fi trebuit să-1 amintim mai

întâi pe Pascal, contemporan cu el. Deşi mai tânăr cu 27 de ani decât Descartes, Blaise Pascal (1623-1662) asista de la vârsta de 14 ani la şedinţele cu caracter ştiinţific pe care le conducea, în chilia sa, Mersenne, şedinţe din care s-a dezvoltat mai târziu Academia de ştiinţe a Franţei. De copil, Pascal a dovedit calităţi de mare matematician. La 12 ani a redescoperit o parte din geometria lui Euclid, demonstrând, într-un mod personal, că suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte. La 16 ani a scris „Tratat despre conice", în care se găsesc multe rezultate originale. Printre altele el a stabilit o teoremă despre hexagoanele înscrise într-o conică; teorema, cunoscută sub numele de "*hexagrama mistică*", stabileşte condiţia ca şase puncte dintr-un plan să se găsească pe aceeaşi conică. Dar, în anul 1654, la vârsta de 31 de ani, atunci când la 19 decembrie a cunoscut „noaptea de foc", adică a avut o revelaţie mistică, el a părăsit brusc domeniul preocupărilor matematice şi fizice, considerând că scopul vieţii lui nu este ştiinţa ci religia. Atunci s-a convertit, intrând în ordinul janseniţilor şi s-a stabilit definitiv la Port-Royal. " *Într-un moment în care Pascal se bizuia pe dragostea lumii şi a ştiinţei, când în contemplarea acelei naturi umane viaţa societăţii şi filozofia şi-au revelat măreţia, în momentul în care geniul lui, admirat de toţi şi spiritul lui sărbătorit de oameni importanţi, îi asigurau gloria şi fericirea pe care o urmărea cu inima lui aprinsă,... pe când avea 30 de ani, a fost izbit de o lumină extraordinară, care i-a arătat lucrurile şi pe el însuşi într-un mod cu totul nou. Se părea că toate bunurile care l-au încântat până atunci pluteau ca nişte atomi imperceptibil în inima lui infinită. Se întreba dacă lucrurile care îl preocupau, bucuriile în care se complăcea, erau cu adevărat demne de el, demne de sufletul omenesc. El a avut sentimentul unei nepotriviri imense între condiţia lui şi destinul lui* ", observă E. Boutroux (22).

- Totuşi, pasiunea lui pentru matematică nu a fost definitiv înăbuşită. El a continuat corespondenţa cu prietenii lui matematicieni asupra unor probleme la care lucrase mai înainte. Mai mult,

chiar pe când avea 35 de ani, l-a cuprins într-o noapte o teribilă durere de dinţi şi ca să o stăpânească şi-a îndreptat toate gândurile asupra cicloidei, curbă cunoscută atunci sub numele de ruletă. Durerile i-au încetat şi, interpretând acest fapt ca o bunăvoinţă a lui Dumnezeu, a continuat să studieze proprietăţile cicloidei timp de 8 zile neîntrerupt. A publicat, apoi, aceste rezultate, sub numele Amos Dettonville şi le-a adresat, ca o provocare, matematicienilor francezi şi englezi. În mănăstire a scris două cărţi din domeniul literelor şi al filosofiei: "*Provincialele*" şi "*Cugetări*" care-şi păstrează interesul până acum.

- Iată una din "*Cugetări*": „Noi ştim că există un infinit dar nu-i cunoaştem natura lui. Aşa după cum ştim că numerele nu sunt finite, că există un infinit în număr, dar nu ştim cum este. El nu-i nici un număr par nici un număr impar, căci adăugând unitatea el nu-şi schimbă natura, totuşi el este un număr şi se ştie că orice număr este par sau impar, dar această proprietate se referă numai la numerele finite.

Astfel putem cunoaşte că există un Dumnezeu, fără să ştim ce este El. Noi cunoaştem doar existenţa şi natura finitului căci suntem finiţi şi mari ca El. Cunoaştem existenţa infinitului dar nu ştim natura lui, pentru că şi el are ca noi întindere, dar el nu-i mărginit ca noi. Însă existenţa şi natura lui Dumnezeu nu o cunoaştem pentru că El nu are nici întindere şi nici margini. Prin credinţă îi cunoaştem existenţa, prin glorie îi cunoaştem natura. Ori, am arătat că putem cunoaşte foarte bine existenţa unui lucru, fără să-i cunoaştem natura." (23).

- Iată o problemă, aceea a infinitului, la care am putea zăbovi mult, dar s-o lăsăm pentru mai târziu. Acum să ne întoarcem numai la antichitate căci şi Pitagora şi Platon au pus problema infinitului în matematică. Ei au ajuns la noţiunea de infinit observând că, în şirul numerelor naturale, putem obţine întotdeauna un număr mai mare decât un număr dat, adăugându-i acestuia o unitate. Aşadar, ei considerau infinitul ca o mărime ce devine din ce în ce mai

mare, sau, în mod analog, din ce în ce mai mică; acesta este infinitul potențial. Această problemă l-a preocupat foarte mult și pe Aristotel. Uite am aici "*Fizica*" lui apărută în traducerea românească (24), să alegem câteva paragrafe, ca să-l ascultăm chiar pe autor: „Cercetarea în legătură cu infinitul este anevoioasă. Astfel și cei ce spun că există și cei ce spun că nu există, întâmpină dificultăți. Mai mult, se ridică întrebarea: cum este el? Este oare substanță? Sau este un atribut esențial al unei naturi? Sau nu este nici una nici alta? Și există oare un infinit sau numai lucruri infinite la număr?... Într-un fel, infinitul este ceea ce prin natură nu poate fi parcurs, ca vocea care este invizibilă, sau ceea ce se poate parcurge, dar nu are sfârșit, sau ceea ce se poate cu greu parcurge, sau ceea ce din natură poate fi parcurs dar nu există putința de a fi parcurs în întregime fiindcă n-are sfârșit..." (l.c. 23-24 pag. 67).

- Aristotel admitea numai existența infinitului potențial și susținea că nu poate exista infinitul actual: „Nu este posibil ca infinitul să fie separabil de lucrurile sensibile (ca și cum ar fi) în sine un lucru infinit. Iar dacă infinitul nu este nici mărime, nici număr, ci substanță în și prin sine, și nu accident, atunci este indivizibil pentru că divizibilitatea este mărime sau număr. Iar dacă este indivizibil nu este infinit, afară numai dacă nu este ca vocea nevăzută... Este iarăși evident că nu se poate admite că infinitul există, ca fiind în act, sau ca substanță, sau ca principiu, pentru că atunci oricare parte din el va fi infinită, dacă se poate împărți..." (l.c. pag.68).

- Iată-l vorbind și mai clar despre existența infinitului potențial: „*Se spune că existența este în potențialitate și în act și că infinitul este prin adăugare și prin luare. S-a spus că mărimea în act nu este infinită, dar că este prin diviziune, rămâne deci că infinitul este prin potențialitate. Nu trebuie însă să înțelegem expresia "a fi în potențialitate" ca și cum s-ar spune că este posibil ca un lucru să fie o statuie adică va fi o statuie, tot așa am putea să socotim că există un lucru infinit, care va fi în act... De altfel este evident că infinitul există în timp, ca bunăoară la oameni și la divi-*

ziunea mărimilor. În general, infinitul constă în faptul de a lua mereu alt şi alt lucru şi în faptul că lucrul luat este mereu limitat, dar este mereu altul şi altul. " (pag 74).

- Infinitul l-a preocupat mult şi pe Leonard Euler (1707-1783) despre care Arago spunea că „el calcula cu uşurinţa cu care omul respiră şi vulturul zboară în văzduh". Se povesteşte, în legătură cu infinitul, o întâmplare nostimă, anume când a avut loc întâlnirea lui cu Denis Diderot.

- După cum se ştie Euler a petrecut o bună parte din viaţa lui în Rusia, la curtea împărătească. Pe vremea Ecaterinei, a fost invitat la curtea ţarinei Denis Diderot care, în timpul şederii sale acolo, a căutat să convertească la ateism pe curteni. Acest lucru nu i-a plăcut deloc împărătesei şi deci l-a rugat pe Euler să găsească o modalitate de a pune capăt acestui fapt. Aşa se face că, atunci când cei doi învăţaţi s-au întâlnit, Euler s-a adresat pe un ton foarte serios lui Diderot: --"*După cum vedeţi, domnule, raportul* $(a+b^n)/n$ *este infinit atunci când n este infinit, ceea ce dovedeşte că Dumnezeu există* !". Surprins, Diderot care nu înţelegea nimic din această expresie a tăcut, ceea ce a provocat râsul lui Euler, al ţarinei şi al curţii. Acest fapt l-a îndemnat pe Diderot să ceară permisiunea de a se întoarce în Franţa, lucru care i s-a aprobat de îndată.

- Se pare că întâmplarea respectivă i-a plăcut şi lui Euler căci l-a îndemnat să mai stabilească şi alte expresii care tind spre infinit şi să le pună în legătură cu existenţa lui Dumnezeu, iar rezultatele au fost publicate chiar atunci în revistele de teologie.

- Parcă marele C.F. Gauss (1777-1855) a rămas indiferent la problema infinitului actual, care începuse să apară pe vremea aceea tot mai des în scrierile matematicienilor? În anul 1831 el a scris unui prieten: „Protestez contra folosirii mărimilor infinite ca şi cum ar fi ceva finit, ceea ce nu-i niciodată admisibil în matematică. Infinitul este numai un fel de a vorbi, adevăratul lui sens este o limită, de care se apropie nedefinit anumite rapoarte, în timp ce altele pot creşte fără nici o restricţie."

- Şi totuşi, numai peste jumătate de veac, Georg Cantor (1845-1918) va introduce în matematică infinitul real sau actual. El a afirmat că: „diferenţa esenţială între noţiunile de infinit potenţial şi infinit real este că primul se referă la o mărime variabilă, finită, crescând peste orice limită finită, în timp ce infinitul actual este o mărime constantă, fixată, situată dincolo de orice mărime finită".

- Ca să putem urmări metoda prin care Georg Cantor a reuşit să prezinte infinitul actual, trebuie să fixăm, mai întâi, noțiunea de *număr cardinal* sau *de putere* a unei mulțimi.

- Să precizăm întâi că pentru Cantor o "*mulțime*" înseamnă o reuniune de elemente, despre care se ştie numai că, fiind dat un element oarecare, se poate afirma dacă el aparţine, sau nu, mulțimii date.

- Aşa-i. Acum să ne oprim, mai întâi, la mulțimile finite. Dacă două mulțimi au acelaşi număr de elemente, fapt ce se poate constata fie numărându-le, fie stabilind o corespondență de la unu la unu între elementele celor două mulțimi, se spune că ele sunt echivalente şi au acelaşi *număr cardinal* sau aceeaşi *putere*.

Această noțiune de număr cardinal se aplică oricărei mulţimi finite de obiecte. Unui obiect izolat, fiind singurul obiect al mulțimii, îi corespunde numărul cardinal 1. Pornind de la această mulțime şi adăugându-i în mod succesiv câte un nou element, se formează seria nelimitată de numere cardinale finite, având ca termeni diferite numere întregi. Acest principiu de formare constituie o clasă de numere: 1, 2, 3, 4,..., n..., care sunt toate finite şi printre care nu găsim un număr maxim, căci, oricât de mare ar fi n putem forma pe $(n+1)$, aşadar, mulțimea acestor numere este infinită. În cazul mulțimilor infinite, când numărarea elementelor lor nu mai poate avea loc, rămâne posibilă stabilirea corespondenței dintre elementele celor două mulțimi. De pildă, mulțimea numerelor naturale poate fi pusă în corespondență cu alte mulțimi de numere, de pildă cu aceea a numerelor pare: 1, 2, 3, 4,..., n...; 2, 4, 6, 8,..., $2n$, ...

Cantor a numit toate mulţimile ce se pot pune în corespondenţă cu mulţimea numerelor naturale, ***mulţimi numărabile*** sau având acelaşi *număr cardinal* cu mulţimea numerelor naturale.

- Cantor a arătat că printre acele mulţimi care sunt infinite şi numărabile, adică au aceeaşi putere cu mulţimea numerelor întregi, se află şi mulţimea numerelor raţionale precum şi mulţimea numerelor algebrice, care este cu mult mai amplă decât ale celor raţionale.

- E şi natural să fie aşa, fiindcă numerele algebrice de gradul n sunt acele numere raţionale sau iraţionale care verifică o ecuaţie algebrică de gradul n, cu coeficienţi întregi.

- Mai mult, noţiunea de număr algebric a fost generalizată şi pentru rădăcinile unei ecuaţii algebrice de gradul n, în care coeficienţii ecuaţiei sunt şi anumite numere algebrice.

- Aşa că, în rezumat, putem spune că, mulţimea numerelor întregi raţionale: 1, 2, 3, 4,..., n..., γ are tot atâtea numere, adică are acelaşi număr cardinal, ca şi mulţimile numerelor raţionale sau iraţionale algebrice. Această mulţime γ este infinită, dar γ este un ***infinit potenţial***. Ca de la el să se ajungă la ***infinitul actual*** sau la ***numărul transfinit*** Cantor consideră ***„limita către care tinde orice număr*** γ, ***cu condiţia ca să înţelegem prin această limită*** ω ***primul număr care urmează după toate numerele*** γ, ***astfel ca să poată fi considerat superior tuturor numerelor***".

În cazul mulţimilor infinite a numerelor întregi, Cantor a ales ca simbol pe alef zero: $\aleph_0$, prima literă a alfabetului ebraic, şi a reprezentat prin el puterea mulţimilor numărabile. Alef zero sare dincolo de numerele finite, el este ***un număr transfinit*** este ***infinitul real*** sau ***infinitul actual***. Iată câteva dintre proprietăţile lui:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0; \quad n \cdot \aleph_0 = \aleph_0; \quad \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 = \aleph_0.$$

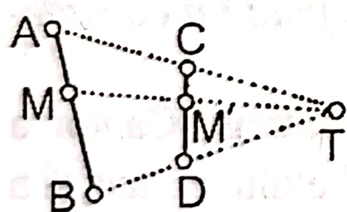
Din aceste relaţii rezultă că axioma din logică, bine cunoscută, care admite că întregul este mai mare decât o parte a lui, nu este adevărată decât în cazul mulţimilor finite. Mulţimile infinite

sunt părți integrante din ele înseși. Acest adevăr asupra infinitului actual a fost observat de Pascal, care a scris în Cugetările sale:

„Unitatea adăugată infinitului nu-l mărește. Infinitul este, dintre toate mărimile, acela care nu se micșorează prin scoaterea din el a unei părți a lui. De altfel și Sf. Augustin (354-430) a pus această problemă în cartea sa: "*Cetatea lui Dumnezeu*": „Cine ar îndrăzni să refuze lui Dumnezeu puterea de a cunoaște toate numerele și mai ales numerele infinite? Trebuie să credem că Dumnezeu ajunge numai până la o anumită sumă de numere și nu le mai cunoaște pe celelalte? Ar fi fără sens, cu atât mai mult cu cât Dumnezeu iubește matematica."

- Iată ce scrie și M. T. Bell: „Cantor se plasează astfel în mod definitiv pe planul marilor teologi ai Evului Mediu, pe care el i-a studiat în mod profund și i-a admirat cu pasiune."(l.c.19, pag 591).

- Acest rezultat neașteptat și intuitiv, destul de greu de acceptat, i-a făcut pe matematicienii aceia să se întrebe dacă există și mulțimi infinite mai mari decât $\aleph_0$. Cantor a dovedit că mulțimea numerelor transcendente, adică a rădăcinilor ecuațiilor care nu sunt algebrice, ca de pildă $a \cdot e^x = b$ sau $\sin x = c$, precum și mulțimea numerelor reale, este mai mare decât mulțimea numărabilă și, deci, puterea unor asemenea mulțimi este mai mare decât $\aleph_0$. De asemenea, el a arătat că mulțimea punctelor de pe un segment de dreaptă, oricât de mic ar fi el, nu este numărabilă și este egală cu mulțimea punctelor de pe oricare alt segment de mărime diferită. Într-adevăr, aceasta se poate constata ușor dacă se consideră două segmente de dreaptă AB și CD în care AB > CD. Unind B cu D și A cu C și numind T punctul de intersecție dintre AC și BD, orice dreapta TT′ care trece prin T și se rotește în jurul punctului T, parcurge în același timp segmentele AB și CD, în așa fel că la fiecare punct M de pe AB, corespunde un singur punct M′ de pe CD. Cantor a numit puterea acestor mulțimi a numerelor re-



ale sau a punctelor de pe o dreaptă, *puterea continuului* şi a notat-o cu litera *c*. El a dovedit că puterea continuului este aceeaşi oricâte ar fi numărul dimensiunilor unui spaţiu adică, numărul punctelor de pe un segment de dreaptă este egal cu acela de pe o porţiune de plan, sau într-un spaţiu cu trei sau mai multe dimensiuni.

- Emile Borel observă că „atunci când Georg Cantor a publicat primele sale cercetări asupra numărării numerelor mai mari decât infinitul, publicul matematic nu l-a privit cu încredere. Totuşi, mulţi analişti au fost uimiţi de frumuseţea acestor speculaţii." (25).

- Şi E.T. Bell arată, în cartea sa (l.c.19, pag. 591), cele scrise în 1901 de Bertrand Russel despre Cantor, care s-a apropiat de infinit, ca un Prometeu: „Zenon s-a ocupat cu trei probleme... aceea a infinitesimalelor, aceea a infinitului şi aceea a continuităţii... De la epoca lui la a noastră, cele mai puternice spirite din fiecare generaţie, au studiat pe rând aceste probleme, dar sincer vorbind, fără să ajungă la nimic. însă Weierstrass, Dedekind şi Cantor... le-au rezolvat complet.

Soluţiile lor sunt aşa de clare, că nu au mai lăsat nici o urmă de dificultate. Acest rezultat este fără îndoială cel mai mare, cu care epoca noastră se poate mândri... Problema infinitului mic a fost rezolvată de Weierstrass; Dedekind a început soluţionarea celorlalte două, iar Cantor le-a desăvârşit".

- Avea dreptate Russel. Richard Dedekind, unul dintre cei mai mari matematicieni germani, care a înţeles importanţa noţiunii de grup sau mulţime, în algebră şi aritmetică, a stabilit teoria modernă a numerelor algebrice. Cu această problemă s-a ocupat şi Cantor care, după cum am văzut, a ajuns să stabilească, în 1874 că grupul tuturor numerelor naturale 1, 2, 3, 4,... conţine tot atâţia termeni ca şi acela, infinit mai cuprinzător, al numerelor algebrice, adică au amândouă acelaşi număr cardinal. Cantor şi Dedekind au fost prieteni, s-au întâlnit întâmplător în timpul unei călătorii în Elveţia şi, apoi, din acel an, au început să-şi scrie fără întrerupere până în 1899, când Cantor nu a mai publicat nimic despre teoria

mulțimilor. În aceste scrisori, Cantor i-a arătat lui Dedekind nu numai toate rezultatele pe care le obținea ci și toate rezultatele pe care presupunea că le va obține. Dedekind îi răspundea prompt arătându-i demonstrațiile pe care le considera greșite, sau simplificându-i altele, căci Dedekind cunoștea aceste probleme de care se ocupase și el și avea autoritatea necesară. În 1937, conținutul matematic al acestor scrisori a apărut sub îngrijirea lui E. Noether și J. Cavailles la Paris, cu o introducere, din care vreau să citim câteva rânduri (26): „Sunt puține exemple de vieți așa de strâns legate de o operă de teorie, operă de asemeni exclusiv personală a unui singur cercetător. Într-o scrisoare pe care a scris-o la 17 ani, Cantor vorbește "*de o voce necunoscută și misterioasă*" care, în contra voinței tatălui său, îl chema să studieze matematica".

- Când a obținut această aprobare, citim în T.E. Bell (l.c.19, pag. 595) răspunsul lui Cantor: „Scumpul meu Tată,... această, scrisoare decide viitorul meu. Sunt fericit să știu că nu te supără că voi urma ceea ce doresc eu... căci sufletul meu, toată ființa mea trăiește din vocația mea".

- „În 1872, colegul său din Halle, Heine, l-a îndemnat să studieze seriile trigonometrice. În câțiva ani, acest studiu l-a condus la descoperiri uluitoare, întâi uluitoare chiar pentru autor : "*văd dar nu cred*", îi scria el în 1877 lui Dedekind, referindu-se la noțiunile cu totul noi despre puterile abstracte, începuturile topologiei, aritmetica numerelor transfinite, edificiu a cărui îndrăzneală și frumusețe l-au făcut pe Hilbert să spună că "*reprezintă una dintre cele mai frumoase creații ale spiritului matematic*", dar, a cărui noutate a stârnit neîncrederea lui Weierstrass, iar lui Kronecker i-a dezlănțuit chiar o ostilitate pe care nu a pregetat să i-o arate". (l.c.26, pag. 3-4).

- Asupra acestui capitol înfiorător al relațiilor Cantor-Kronecker, nu ne vom opri fiindcă el nu face parte din preocupările noastre!

- Atunci să citim mai departe: „Singurul sprijin i-a venit din partea lui Mittag-Leffler care i-a deschis lui Cantor revista Acta Mathematica pe care a întemeiat-o. Chiar din volumul 2 a apărut o

traducere făcută în limba franceză a Memoriilor lui Cantor din Mathematische Annalen". (l.c.26 pag.4). Un articol a fost tradus de H. Poincaré, ceilalţi traducători fiind tineri matematicieni din jurul lui Charles Hermite.

- Hermite, era „unul dintre adepţii entuziaşti ai teoriei lui Cantor" scrie Bell, adăugând că într-o scrisoare pe care a adresat-o lui Mittag-Leffler, Cantor spunea: „Elogiile pe care Hermite le aduce teoriei grupurilor au atâta preţ în ochii mei şi le merit aşa de puţin, încât nu le dau publicităţii de frică să nu fiu acuzat de îngâmfare". (l.c.19.pag. 606).

- Într-o altă scrisoare a lui Cantor către Mittag-Leffler, din 1884, în care se plângea de atitudinea lui Kronecker, el scria: „Dacă esenţa matematicii este libertatea, matematicianul nu face altceva decât să descopere o lume, intrinsecă spiritului său, care se află acolo într-o obiectivitate absolută: eu nu sunt, faţă de conţinutul lucrărilor mele decât redactorul şi funcţionarul. (l.c.26, pag.7).

- Georg Cantor nu a considerat descoperirea sa despre "*transfinit*" numai ca o problemă matematică ci, în strânsa ei legătură cu Religia şi Matematica. H. Meschkowski menţionează o scrisoare a lui Cantor, adresată lui Hermite, în 1894, în care scria: „Au trecut mai mult decât 20 de ani, de când, în domeniul spiritului meu, matematica nu-i singura şi totuşi ea este dragostea esenţială a sufletului meu. Metafizica şi Teologia mă pasionează într-aşa fel încât mi-a rămas, relativ, mai puţin timp pentru prima mea dragoste... Acum nu mai am decât să mulţumesc lui Dumnezeu, cel foarte înţelept şi foarte bun, că nu mi-a îndeplinit dorinţa mea (de a ocupa o catedră de matematică la Berlin) căci astfel m-a forţat, datorită unei cunoaşteri mai adânci a teologiei, să-i servesc Lui şi Sfintei Sale Biserici Catolice Romane mai bine decât aş fi făcut-o dacă m-aş fi ocupat exclusiv de matematică" (27).

- Cu 10 ani mai înainte de a fi publicat articolul pe care l-am citit când am început să discutăm, Pierre Thuillier a mai publicat, în aceeaşi revistă (28) un articol despre Cantor, care începe aşa:

„Secole de-a rândul, în Occident, o tradiție solidă idealistă atribuia lui Dumnezeu o mare dragoste pentru matematică... Leibniz declara că lumea pe care o cunoaştem exprimă rezultatul unui calcul divin... Cantor, creatorul teoriei mulțimilor, credea că teoremele sale aveau ca origine pe Dumnezeu. El a găsit în Sf. Pavel şi în Sf. Augustin fundamentul ultim al numerelor transfinite!"

- Într-adevăr, în ultimul său articol matematic publicat în 1895 şi 1987 în Mathematische Annalen, despre "*mulțimile transfinite*", Cantor a pus ca motto, alături de un citat din Newton, pe acesta, din Epistolele Sf. Pavel: „Va veni timpul când ceea ce este acum ascuns, va fi adus la lumină".

- Thuillier citează mai multe scrisori schimbate între diferiți teologi şi Cantor, cu privire la infinitul actual. De pildă, în 1888 el îi scria călugărului neo-thomist Jeiles: „nu mă voi îndoi niciodată în legătură cu adevărul numerelor transfinite, că eu le-am recunoscut cu ajutorul lui Dumnezeu". O altă scrisoare adresată călugărului dominican Thomas Esser în 1896, în care îi aminteşte despre încercările făcute încă din secolul al 18-lea asupra problemei infinitului actual, o încheie astfel: „Datorită mie, filosofia creştină va dispune, pentru întâia oară, de o adevărată teorie asupra infinitului, de la începutul lui. Ştiu sigur şi precis că această teorie v-a fi acceptată, e vorba numai dacă acum, sau abia după moartea mea."

- Şi Cantor a avut dreptate ! Teoria lui asupra infinitului actual a fost acceptată de matematicieni, chiar de la începutul secolului 20, fiind considerată ca o contribuție fundamentală în matematică şi, mai ales, în fundamentele analizei. „Teoria lui Cantor, spunea David Hilbert, îmi pare fructul cel mai admirabil al spiritului omenesc şi, cu adevărat, una dintre aplicațiile cele mai sublime ale procedeelor intelectuale ale omului", şi a adăugat: „Din paradisul pe care l-a creat Cantor pentru noi, nimeni nu ne va izgoni."

- „Georg Cantor a murit în 1918, când geniul lui a fost recunoscut, i-au fost decernate onoruri şi chiar controversa lui cu Kronecker a fost uitată". (1.c. 9, pag. 613).

- Ca să încheiem definitiv discuţia noastră, ne-a mai rămas o problemă, aceea dacă elementele matematice sunt descoperiri sau sunt invenţii !

- Problema aceasta nu e rezolvată. Ea împarte pe matematicieni în două clase: unii consideră că matematica are o existenţă proprie, iar alţii că este o invenţie omenească. Dar acesta va fi subiectul convorbirii noastre viitoare.

„Cunoaşterea matematicii este o realitate.
Puterea este o realitate şi credinţa este o realitate.
Iar aceste realităţi pot fi cercetate de om,
independent de dogma acceptată”

Norbert Wiener

- Marele matematician G. H. Hardy consideră că există o realitate matematică în sine. În cartea tradusă şi la noi, cu titlul: "*Crezul meu? Matematica*" (629), el scrie: „Pentru mine şi, după cum presupun, pentru majoritatea matematicienilor, mai există o realitate pe care eu o numesc realitate matematică. Dar, în ceea ce priveşte natura realităţii matematice, nu există nici un fel de acord, nici între matematicieni nici între filosofi. Sunt unii care consideră că această realitate este de natură *spirituală* şi că, într-un sens, noi suntem acei care o construim, în timp ce alţii socotesc că ea este în afara noastră şi independentă de noi... N-aş vrea să discut aici despre vreuna din ele, chiar dacă aş fi competent să o fac. Îmi voi enunţa însă concepţia, cu scopul de evita unele confuzii, fie chiar de mică însemnătate. Am credinţa că realitatea matematică este în afara noastră, că sarcina noastră este de a o *descoperi* sau de *a observa* şi că teoremele pe care le demonstrăm şi pe care le descriem cu atâta emfază, ca pe nişte *creaţii proprii*, nu sunt decât notele pe care le-am luat în timpul observaţiilor noastre. Acest punct de vedere a fost susţinut, într-o formă sau alta, de mulţi filosofi de înaltă reputaţie, de la Platon încoace, astfel că limbajul pe care îl voi folosi e firesc pentru un om care este şi el de aceeaşi părere".

- Şi teologii spun că matematica există în mod obiectiv. Că există o infinitate de numere pare sau prime etc, deşi alţii susţin că aceste numere au fost inventate. Cantor era de părerea acelora care consideră că numerele există în mod obiectiv. Kronecker susţinea că numai "*numerele întregi au fost create de Dumnezeu*", restul

este opera oamenilor. O întrebare interesantă este aceea despre ordonarea punctelor pe o dreaptă. Ele există gata ordonate. *Într-o anumită ordine*, căci noi putem spune despre un punct că este la dreapta sau la stânga altuia şi totuşi noi *nu putem ordona punctele de pe o dreaptă*, pentru că între două puncte oarecare, oricât ar fi ele de apropiate există un alt punct al dreptei, adică o infinitate de puncte!

- Vreau să-ţi citesc cele ce scrie E. Schrodinger. El afirmă că renumele lui Platon căruia „nu i se atribuie nici o descoperire specială privind numerele sau figurile geometrice", se datorează: „faptului că a fost primul care a luat în consideraţie ideea existenţei atemporale, reliefând-o, împotriva bunului simţ - ca pe o realitate, mai reală decât existenţa noastră adevărată". Platon a considerat că „învăţarea prin raţiune are mai degrabă natura cunoaşterii reamintite, stăpânită, cândva, iar în prezent aflată în stare latentă, decât pe aceea a descoperirii de adevăruri absolut noi... El a identificat şi absorbit în spiritul său natura revelaţiilor din domeniul numerelor şi al figurilor geometrice, faptul că ele se dezvăluie de la sine prin raţionamentul logic pur, care ne face să cunoaştem nişte relaţii adevărate, al căror adevăr este inatacabil şi pentru totdeauna prezent relaţiile sunt corecte şi vor fi corecte indiferent dacă le cercetăm sau nu. Un adevăr matematic este atemporal, el nu ia fiinţă în clipa când îl descoperim. Totuşi, descoperirea lui este un eveniment real, el ne poate emoţiona ca un dar din poveşti" (30).

- Şi N. Bourbaki, accentuează acest fapt: „ori care ar fi nuanţa filozofică cu care se elaborează concepţia obiectelor matematice la un anume matematician sau filosof, există cel puţin un punct în care toţi sunt în unanimitate: acela că obiectele *ne sunt date* şi că nu stă în puterea noastră să le atribuim proprietăţi arbitrare, aşa cum nici un fizician nu poate schimba un fenomen natural". (31).

- E adevărat. Aşa după cum am mai spus, dacă unii matematicieni consideră că matematica este o invenţie a oamenilor, alţii admit că adevărurile matematice au o existenţă proprie, extraome-

nească şi că noi întâlnim aceste adevăruri eterne în cercetările pe care le facem. Iată ce scrie şi Jacques Hadamard: „Vorbim despre invenţie, dar ar fi mai corect să vorbim despre descoperiri. Deosebirea între aceste două cuvinte este cunoscută: descoperirea priveşte un fenomen, o lege, o fiinţă vie care există dar despre care nu ştiam. Christofor Columb a descoperit America dar ea exista înaintea lui. Benjamin Franklin a inventat paratrăsnetul, înaintea lui el nu a existat... Lucrarea omului de ştiinţă este, în cazul matematicii, o descoperire. Aşa cum îmi spunea profesorul meu Hermite: "*În matematică noi suntem servitori şi totodată stăpâni.*" Deşi adevărurile nu ne sunt cunoscute încă, ele preexistă şi ne impun inevitabil calea pe care trebuie să o urmăm, fără frică de a ne rătăci" (32).

- A! dacă-i vorba de Charles Hermite, atunci hai să citim mai pe îndelete cele ce a scris despre el Gaston Darboux (33): „El gândea (*şi eu citez aici propriile lui expresii*) că numerele şi funcţiile din analiză nu sunt produsul arbitrar al spiritului nostru, că ele există în afara noastră, cu acelaşi caracter de necesitate ca şi lucrurile din realitatea obiectivă, că noi le întâlnim şi le descoperim şi le studiem aşa cum o fac fizicienii, chimiştii, zoologii...". Că această părere o avea de mult, ne-o dovedeşte un pasaj dintr-o scrisoare adresată de Hermite lui Stieltjes: „Sunt pe deplin convins că speculaţiile cele mai abstracte din Analiză corespund realităţii care există în afara noastră şi vom ajunge cândva să o cunoaştem. Cred chiar că eforturile geometrilor privesc, fără voia lor, o direcţie care-i îndreaptă spre un anume scop şi istoria ştiinţei îmi pare să dovedească că o descoperire analitică apare la momentul necesar ca să facă posibil un nou progres în studiul fenomenelor lumii reale, accesibile calcului". Aceste idei reveneau în fiecare clipă în conversaţiile cu Hermite. Adesea le nota pe caietul de calcule, ca de pildă pasajul următor : „Există, dacă nu mă înşel, o lume care este mulţimea adevărurilor matematice, în care noi avem acces prin inteligenţă, după cum există o lume a realităţilor fizice, ambele independente de noi, amândouă de creaţie divină care nu ne apar deosebite decât din

cauza slăbiciunii spiritului nostru, dar care sunt, pentru o gândire mai puternică, unul şi acelaşi lucru a cărui sinteză se revelează parţial în această minunată corespondenţă dintre Matematica abstractă, pe de o parte, Astronomia şi toate ramurile Fizicii, pe de altă parte".

Pornind de la faptul că Hermite considera că numerele au o existenţă proprie, ce li se dezvăluie, uneori, matematicienilor prin proprietăţi pline de armonie, îmi vine în minte *teorema lui Goldbach* care, nici până azi, nu a putut fi demonstrată. În 1742 el a comunicat-o, într-o scrisoare către Euler. Goldbach i-a arătat că a găsit o legătură între numerele pare ($n \geqslant 6$), şi anume că acestea sunt suma a două numere prime impare, ba chiar că acest lucru se întâmplă în mai multe feluri, ca de pildă: $34 = 3 + 31 = 29 + 5 = 23 + 11$; $40 = 11 + 29 = 3 + 37 = 23 + 17$... Euler i-a răspuns că a găsit această teoremă evidentă, dar că nu i-a putut stabili încă nici o demonstraţie.

- Şi Descartes credea în existenţa mărimilor matematice. Iată teoria lui asupra triunghiului etern „Îmi imaginez un triunghi, care nu se află nicăieri în lume, ci numai în gândul meu. Recunosc clar şi evident, aşa cum au demonstrat alţii, diferitele proprietăţi ale acestui triunghi, anume că suma celor trei unghiuri ale lui este egală cu două unghiuri drepte, că cel mai mare unghi al lui este susţinut de latura cea mare şi multe alte proprietăţi, pe care, dacă vreau sau dacă nu vreau, există în acest triunghi, deşi eu nu m-am gândit, sub nici o formă, la acestea atunci când mi l-am imaginat pentru prima oară şi nici nu pot zice că le-am inventat eu".

- Iată ce scria şi Gauss, despre o teoremă de aritmetică pe care încerca de mai mulţi ani s-o demonstreze dar nu reuşea: „În sfârşit, de două zile, am reuşit să o fac, dar nu din cauza îndelungatelor mele eforturi, ci numai prin voinţa lui Dumnezeu. Dintr-odată, ca un fulger, s-a rezolvat enigma, dar nu pot spune eu însumi care a fost firul conducător, care a legat cele ce ştiam de cele ce au făcut succesul meu posibil".

- Iată ce crede şi matematicianul Emile Borel: „Descoperirea geometriei analitice a fost primul exemplu de descoperire a unei metode generale în matematică, dacă prin metodă generală înţelegem o metodă care permite să se rezolve un număr nelimitat de probleme şi nu acelea care permit să se rezolve numai câteva. După Descartes, alte descoperiri la fel de importante au lărgit mijloacele de lucru ale matematicienilor, ca de exemplu descoperirea de către Newton şi Leibniz a Calcului Diferenţial, de către Lagrange a Ecuaţiilor generale ale Mecanicei, de către Gauss şi Cauchy a Teoriei funcţiilor de variabilă imaginară, de către G. Cantor a Teoriei generale a mulţimilor. Fiecare dintre aceste descoperiri, ca aceea a lui Descartes, au făcut inutile un foarte mare număr de lucrări anterioare care aveau însă doar probleme particulare, pe când acele descoperiri au făcut posibile nenumărate cercetări noi, care au dus la rezultate mult mai rodnice" (1.c.25. pag. 58).

- Toate aceste mărturisiri, privind cercetarea şi creaţia matematică te îndeamnă parcă să te întrebi: „ce este matematica?, care este natura adevărului matematic ?, care este calea gândirii matematicii ? sau care este esenţa ei ? E adevărat, numai că aceste întrebări nu mai intră în problema pe care ne-am pus-o noi când am început să discutăm şi, afară de aceasta, nici nu ne putem aştepta să găsim un răspuns simplu şi unic, fiindcă din antichitate şi până azi, matematicienii nu au putut stabili o definiţie simplă şi unică a obiectului matematicii. N-avem decât să ne amintim, aşa, la întâmplare, şi fără nici o pretenţie câteva dintre aceste definiţii: Am văzut că Platon arată (în "*Republica*") că esenţiala caracteristică a matematicii este modul particular al gradului de abstracţie. Ştii că şi matematicienii se folosesc de figuri vizibile şi că discută despre ele, fără însă a raţiona asupra lor, ci asupra acelor entităţi cu care figurile doar seamănă: în vederea pătratului însuşi şi a diagonalei lui discută şi nu în vederea figurii pe care o desenează, la fel procedează şi în celelalte cazuri. Ei se folosesc de figurile pe care le alcătuiesc şi le desenează, figuri ce pot avea imagini în apă sau umbre, dar se

folosesc de aceste figuri în calitate de imagini la rândul lor, căutând să vadă dincolo de ele acele realităţi care nu pot fi altfel văzute decât prin intermediul raţiunii". (I.c.13. pag. 319).

- Cât despre Aristotel, el consideră matematica drept studiul cantităţii, iar Roger Bacon ca studiu a ceea ce-i face pe oameni subtili.

- Descartes afirmă că matematica este ştiinţa ordinii şi a măsurii, Felix Klein ca ştiinţa lucrurilor de la sine evidente, Benjamin Peirce ca ştiinţa care trage concluziile necesare, iar Whitehead ca dezvoltarea „ *tuturor formelor de raţionament formal, necesare şi deductive*".

- Bertrand Russell o caracterizează ca un subiect identic cu logica, iar David Hilbert ca o gamă *„formal lipsită de înţeles !"*.

- E foarte frumoasă definiţia pe care a dat-o Poincaré "*Invenţiei Matematice*". Să o recitim: „Este actul în care spiritul omenesc pare să împrumute cel mai puţin lumii exterioare, în care el nu acţionează decât prin el însuşi şi asupra lui însuşi, astfel că cercetând procesul gândirii geometrice, putem spera să atingem ceea ce este mai esenţial în spiritul omenesc." (l.c.9, pag. 43).

Şi tot în acest volum găsim: „Există o realitate mai subtilă decât aceea a lumii sensibile, care formează viaţa fiinţelor matematice şi care este altceva decât logica" (I.c.9. pag. 133).

- Şi acest *altceva* este tocmai ceea ce face frumuseţea şi armonia matematicii şi prin care ea ne apropie de Dumnezeu!

LITERATURĂ

1. La Recherche. Ianuarie 1987, pag. 116. Paris.
2. F. Picavet: Gerbert, un pape filosofe. Paris 1897, pag. 170.
3. l. c. (2) pag. 187.
4. Înțelepciunea lui Solomon (11, 20).
5. l. c. (2) pag. 198.
6. G. Kaupin: Les mathematiques. Options et Curiozites. Paris, 1898, 63.
7. B. G. Kuznețov: Rațiune şi Ființare. Ed. Politică. Bucureşti, 1979, pag. 405.
8. Pierre Boutroux: Les Matematiciens Paris, 1922, pag. 16.
9. Henri Poincaré: Science et Methode, Paris, 1927, pag. 43 şi 57, 1923 pag. 34.
10. Leon Brunschvieg: Les etapes de la Philosophie Mathematique. Paris.
11. Euclid: Elemente vol. II, traducere de V. Marian. Bucureşti, pag. 6. pag. 12.
12. Nicolas Bourbaki: Elemente d'Histoire des mathematiques. Paris, 1984.
13. Platon: Opere vol. V. Ed. ştiințifică şi enciclopedică. Buc. 1986. pag. 310.
14. D. Isac: Aristotel. Buc. Ed. Tineretului, 1959, pag. 168.
15. Paul Tannery: Mem sci. II, Paris, 1912, pag. 527.
16. Paul Tannery: Mem. sci. V, Paris, 1922, pag. 103 şi 229.
17. C. A. Valson: La vie les travaux du Baron Cauchy. Paris, 1970, pag. 73.
18. Werner Heisenberg: Paşi peste graniță. Ed. Politică, Buc. 1977, pag. 107.
19. E. T. Bell: Les grands mathematiciens Paris, 1961, pag. 54.
20. F. Asmus: Descartes Ed. ştiințifică. Buc. 1958, nota 5, pag. 348.

21. Isaac Newton: Principiile matem. ale filosofiei naturale. Traducere de V. Marian. Ed. Academiei, R. P. R. Buc, 956.
22. E. Boutroux: Pascal, Paris, 1924, pag. 68.
23. P. Archambauld: Pascal, Paris, Pensees, pag. 68.
24. Aristotel: Fizica, Ed. ştiinţifică, Buc. 1966, pag. 67 79.
25. Emile Borel: Philosophe et home d'action. Paris, 1967, pag. 139.
26. E. Noether und J. Cavailles: Briafwechsel Cantor - Dedekind, Paris, 1937.
27. H. Meschkowski: Aus den Briefwechsel C. Cantor Archive for History of exact science, 1962, vol. 2, pag. 510.
28. Pierre Thuillier: Dieu, Cantor et 1'infini. La Recherche, dec. 1977.
29. G.H. Hardy: Crezul meu? Matematica. Buc. 1970, pag. 119.
30. Erwin Shrodinger: Ce este viaţa. Ed. Politică, Buc. 1980, pag. 175.
31. Nicolas Bourbaki: Elements D' Histoire des mathematiques. Paris, 1984, pag. 30.
32. Jacques Hadamard. Essai sur le psychologie de 1' invention dans la domaine mathematique. Paris, 1975, pag. 9.
33. Gaston Darboux: Eloges academiques Notice sur Ch. Hermite, Paris, 1912, pag. 141-142.